

La transformée de Fourier et ses applications (partie 1)

par Joël LE ROUX
*École polytechnique universitaire (EPU)
 Université de Nice Sophia-Antipolis*

1.	Transformée de Fourier monodimensionnelle	AF 1 440 - 2
1.1	Séries de Fourier.....	— 3
1.2	Analyse fréquentielle, transformée de Fourier, convolution, filtrage.....	— 4
1.2.1	Sinusoides : fonctions propres des systèmes linéaires invariants dans le temps	— 4
1.2.2	Expression de la transformée de Fourier et de son inverse	— 5
1.2.3	Principales propriétés de la transformée de Fourier	— 5
1.2.4	Représentation simultanée des transformées de Fourier des signaux périodiques et des signaux quelconques.....	— 6
1.3	Extensions de la transformée de Fourier.....	— 7
1.3.1	Transformée de Laplace.....	— 7
1.3.2	Transformée de Hilbert.....	— 8
1.3.3	Analyse temps-fréquence : sonogramme et transformée de Wigner Ville	— 8
1.3.4	Transformée en ondelettes	— 8
1.3.5	Utilisation dans le domaine des probabilités : fonction caractéristique.....	— 8
2.	Échantillonnage, transformée en z et filtrage numérique.....	— 8
2.1	Échantillonnage et analyse spectrale.....	— 8
2.1.1	Reconstruction du signal à temps continu à partir des échantillons	— 10
2.2	Transformée en z	— 11
2.2.1	Propriétés de la transformée en z	— 14
2.2.2	Inverse de la transformée en z. Importance du domaine de définition	— 14
2.2.3	Relation avec la transformée de Fourier.....	— 15
2.3	Filtrage numérique	— 15
2.3.1	Rappel sur la convolution discrète. Réponse en fréquence d'un filtre	— 15
2.3.2	Filtres à réponse impulsionnelle finie ou filtres non récursifs.....	— 15
2.3.3	Interprétation de l'effet du filtre dans le domaine des fréquences.....	— 16
2.3.4	Notions sur la synthèse des filtres numériques.....	— 16
2.3.5	Filtres à réponse impulsionnelle infinie ou filtres récursifs.....	— 16
2.3.6	Dérivation et échantillonnage.....	— 17
	Pour en savoir plus.....	Doc. AF 1 442

La transformée de Fourier, ou plus généralement l'analyse fréquentielle ou spectrale, est un outil fondamental pour la compréhension et la mise en œuvre de nombreuses techniques numériques de traitement des signaux et des images. On la trouve dans des applications directes comme l'analyse harmonique des vibrations et des signaux musicaux, mais aussi dans des domaines très variés. On peut citer toutes les applications où il est nécessaire de mettre en forme les signaux mesurés par des capteurs grâce à un filtrage. On l'utilise dans le codage à débit réduit de la musique et de la parole, la reconnaissance vocale, l'amélioration de la qualité des images, leur compression, les transmissions numériques, les nouveaux systèmes de radio-diffusion et de télédiffusion, dans les applications biomédicales (scanner, imagerie par résonance magnétique nucléaire), en astronomie (synthèse

d'image par interférométrie), en modélisation de propagation d'ondes, en analyse spectrale pour l'étude de structures moléculaires ainsi qu'en cristallographie. Son extension (calculs sur les corps finis) est utilisée dans les méthodes de correction d'erreurs en transmission numérique. Elle intervient aussi dans les méthodes envisagées en informatique quantique pour la factorisation de nombres.

L'objectif de cet exposé est de donner au lecteur les connaissances aussi bien théoriques que pratiques lui permettant de mettre en application les outils d'analyse fréquentielle et de proposer un aperçu de la manière dont ils sont utilisés dans différents domaines. Elle n'a pas de prétention à la rigueur mathématique et insiste plus sur les aspects opérationnels.

Cette présentation a été découpée en trois parties.

La première partie (ce dossier [AF 1 440]) donne les résultats fondamentaux sur la transformée des signaux monodimensionnels fonctions continues puis échantillonnées du temps, plus particulièrement son utilisation en filtrage numérique.

Nous commençons par le cas le plus simple, l'analyse des fonctions périodiques par séries de Fourier, puis continuons par l'analyse des fonctions continues du temps en mentionnant la théorie des distributions. Nous y verrons les propriétés principales, comme la transformée d'une convolution. Ensuite, nous verrons comment la transformée de Fourier permet de traiter les problèmes posés par l'échantillonnage et la formulation du filtrage numérique.

Dans la deuxième partie [AF 1 441], nous verrons les expressions de la transformée de Fourier dans le cas des traitements numériques, en décrivant plus particulièrement l'algorithme de transformée de Fourier rapide. Nous donnerons les résultats principaux concernant l'analyse spectrale des signaux aléatoires, puis ensuite aborderons le cas des signaux bidimensionnels et des images.

La troisième partie [AF 1 442] commence par l'étude du filtrage et l'analyse spectrale des signaux bidimensionnels et se termine par l'exposé de quelques traitements de signaux multidimensionnels faisant intervenir la transformée de Fourier, comme l'imagerie médicale.

1. Transformée de Fourier monodimensionnelle

Historique

Au tout début du dix-neuvième siècle, J. Fourier, éloigné de Paris et du monde scientifique, occupait une partie des quelques loisirs que lui laissait sa fonction de préfet (très actif) de l'Isère, à la résolution des équations de propagation de la chaleur dans un solide. Afin d'en faciliter l'étude, il représentait la fonction cherchée comme une somme de sinusoides, dont la dérivation donne une fonction du même type. Il trouva aussi la formule permettant de calculer l'amplitude de chacune des sinusoides dans cette décomposition : la projection sur une base de fonctions orthogonales.

À la même époque et indépendamment (mais ses écrits sur ce sujet ne furent publiés que bien plus tard), C. F. Gauss étudiait les trajectoires des corps célestes. Pour interpoler leurs fonctions entre les instants d'observation, il utilisait les fonctions périodiques et leur décomposition en harmoniques ; pour accélérer les calculs, il inventa l'algorithme rapide redécouvert cent cinquante ans plus tard par Cooley et Tukey.

Ensuite, l'analyse des systèmes linéaires représentés par des équations différentielles et le développement de la transmission d'information par ondes herziennes nécessitèrent la formulation mathématique du filtrage et de la modulation des fonctions temporelles, de l'échantillonnage, etc. La compréhension de ces techniques passait par l'utilisation de la décomposition en sinusoides, la transformée de Fourier.

Au début de la deuxième moitié du vingtième siècle, le développement des calculateurs numériques et du traitement numérique du signal amena à la redécouverte de la transformée de Fourier rapide. En quelques dizaines d'années, elle est devenue d'usage courant dans une multitude d'applications à destination du grand public (JPEG, MPEG, MP3, télévision numérique, techniques de correction d'erreurs en enregistrement et transmission numérique par exemple) ou dans des domaines socio-économiques de grande importance comme l'imagerie médicale, l'astronomie, l'analyse des molécules et des cristaux, etc.

Elle est aussi au cœur d'un algorithme envisagé en informatique quantique pour la recherche de facteurs d'un nombre, ce qui remettrait en cause certaines techniques actuelles de cryptographie comme RSA.

Dans cet exposé, nous verrons les formules et les propriétés fondamentales, en omettant les démonstrations qu'on trouvera dans des ouvrages plus complets, et nous insisterons sur les éléments nécessaires à la mise en œuvre de ces techniques (en se contentant d'indications pour le développement des méthodes les plus élaborées qu'on pourra approfondir en consultant des ouvrages spécialisés).

1.1 Séries de Fourier

Un signal $x(t)$ périodique de période T_0 peut se décomposer sous la forme d'une somme de signaux sinusoïdaux, les harmoniques, dont la fréquence est un multiple de la fréquence fondamentale :

$$\omega_0 = 2\pi/T_0 \tag{1}$$

Remarque : comme dans la plupart des ouvrages anglo-saxons, nous ne ferons pas la différence entre « pulsation » et fréquence, qui représentent des données identiques avec des unités différentes : radians par seconde dans le premier cas ou nombre de périodes ou de tours par seconde dans le second cas.

On aura ainsi :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\omega_0) \exp(jn\omega_0 t) \tag{2}$$

Il n'y a pas d'autres composantes, en considérant que la composante continue (pour $n = 0$) fait partie des harmoniques. L'amplitude complexe de chaque harmonique $X(n\omega_0)$ est donnée par :

$$X(n\omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \exp(-jn\omega_0 t) dt \tag{3}$$

La figure 1 illustre cette décomposition. En admettant que l'écriture sous la forme (2) est valable, le calcul (3) donne :

$$X'(n\omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(m\omega_0) \exp(jm\omega_0 t) \exp(-jn\omega_0 t) dt \tag{4}$$

qui s'écrit, si la commutation de la sommation et de l'intégration est possible :

$$X'(n\omega_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(m\omega_0) \int_0^{T_0} \exp[j(m-n)\omega_0 t] dt \tag{5}$$

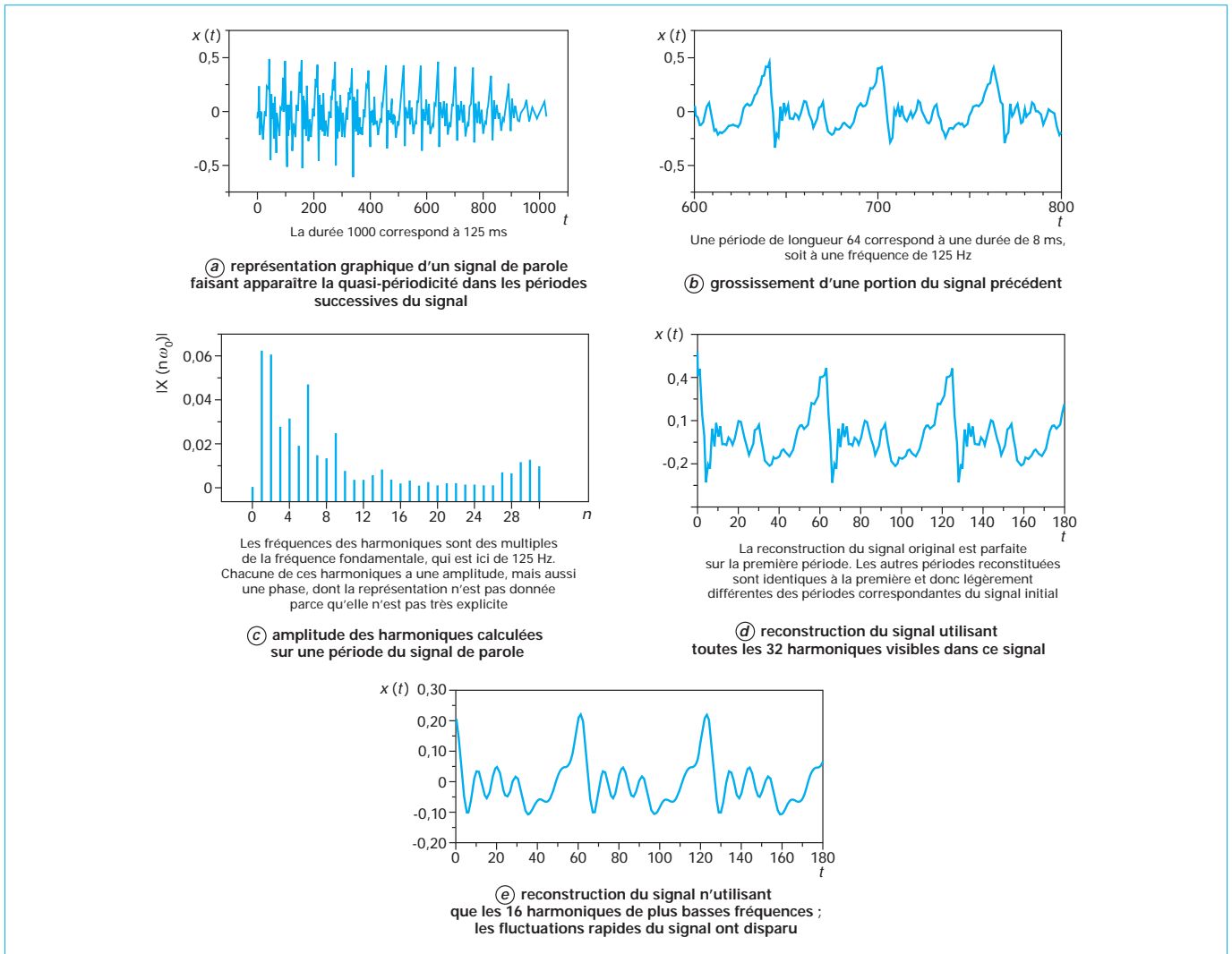


Figure 1 – Décomposition d'un signal périodique

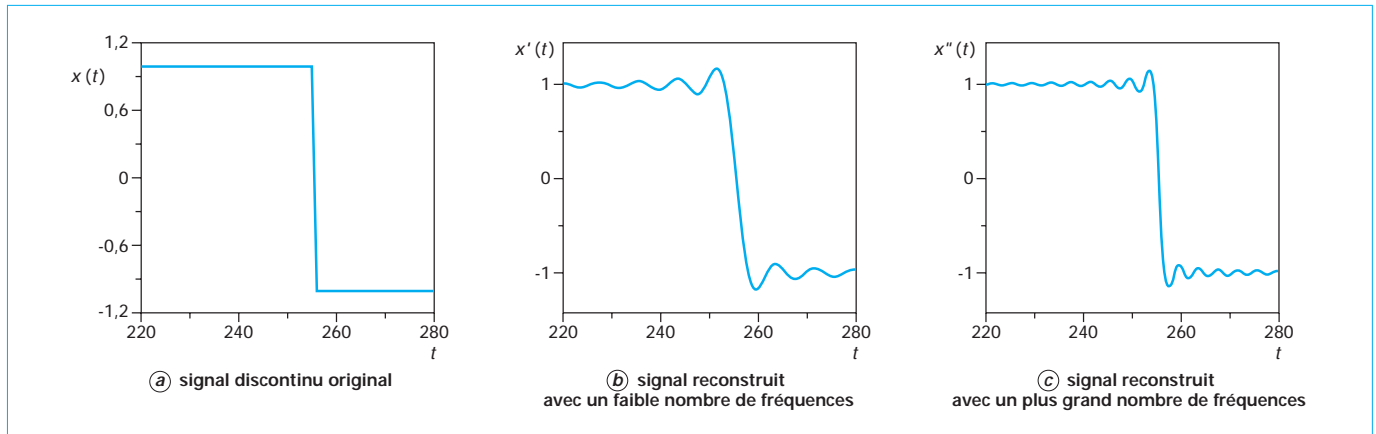


Figure 2 – Reconstruction d'un signal discontinu à partir d'un nombre limité de fréquences faisant apparaître le phénomène de Gibbs

Lorsque :

$$m \neq n \Rightarrow \int_0^{T_0} \exp[j(m-n)\omega_0 t] dt = 0 \tag{6}$$

$$m = n \Rightarrow \int_0^{T_0} \exp[j(m-n)\omega_0 t] dt = T_0$$

on a bien, pour tout n :

$$X'(n\omega_0) = X(n\omega_0) \tag{7}$$

À l'inverse, la démonstration permettant de justifier l'écriture (2) n'est pas si directe : il faut montrer que le signal reconstitué $x'(t)$:

$$x'(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{T_0} x(\tau) \exp jn\omega_0(t-\tau) d\tau \tag{8}$$

$$x'(t) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(\tau) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp jn\omega_0(t-\tau) d\tau \tag{9}$$

est bien égal au signal initial $x(t)$, et donc que pour $-T_0/2 < \tau < T_0/2$:

$$\frac{1}{T_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp jn\omega_0(-\tau) d\tau = \delta(\tau) \tag{10}$$

avec $\delta(\tau)$ impulsion de Dirac.

La démonstration fait appel à la théorie des distributions ; nous en verrons quelques indications au paragraphe 1.2.2. Nous admettrons la validité de ce résultat.

Remarque : nous utiliserons la représentation complexe qui est plus facile à manipuler que la représentation en sinus et cosinus. Cela fait intervenir la notion de fréquences négatives qu'on interprète de la manière suivante. La fréquence est associée à la vitesse de rotation d'un point se déplaçant uniformément sur le cercle de rayon unité. Une rotation dans le sens positif correspond à une fréquence positive, une rotation dans le sens négatif correspond à une fréquence négative. Un mouvement sinusoïdal réel sera la combinaison de deux mouvements en sens inverse.

■ **Remarques sur la convergence, phénomène de Gibbs, nécessité de l'interprétation en termes de distribution**

On notera que si une fonction est discontinue, mais continue par morceaux, comme un créneau, alors le module de sa transformée de Fourier décroît comme ω^{-1} ; si elle est continue, il décroît comme ω^{-2} ; si elle est dérivable, il décroît comme ω^{-3} . Si la décroissance est en ω^{-2} ou plus rapide, le calcul de la transformée de Fourier inverse ne pose pas de difficultés liées à la convergence des intégrales, mais il faut prendre quelques précautions dans le premier cas (décroissance en ω^{-1}).

Dans ce cas, quand on reconstruit le signal $x(t)$ par transformée de Fourier inverse en utilisant un nombre limité de composantes fréquentielles, cette reconstruction $x'(t)$ fera apparaître, au voisinage de la discontinuité, des oscillations dont l'amplitude n'est pas négligeable (phénomène de Gibbs illustré par la figure 2). L'augmentation du nombre d'harmoniques augmente la fréquence des oscillations, **mais ne diminue pas leur amplitude**. La convergence de la fonction $x'(t)$ vers la fonction $x(t)$ a toutefois un sens en termes de distribution : quand le nombre d'harmoniques augmente indéfiniment :

$$\int_A^B x'(t)g(t)dt \rightarrow \int_A^B x(t)g(t)dt \tag{11}$$

pour toutes les fonctions suffisamment régulières $g(t)$. La valeur du signal reconstitué au point de discontinuité est la demi-somme des limites à gauche et à droite du signal original en ce point.

Nous verrons au paragraphe 2.1.1 qu'un phénomène du même type peut apparaître lorsque un signal discontinu est échantillonné et qu'on lui applique un retard d'un demi-échantillon, réalisé dans le domaine des fréquences par un déphasage linéaire de la forme $\exp(j\omega T_e/2)$.

La plupart des propriétés importantes des séries de Fourier seront énoncées dans le cas des transformées de Fourier du paragraphe 1.2.3.

1.2 Analyse fréquentielle, transformée de Fourier, convolution, filtrage

1.2.1 Sinusoïdes : fonctions propres des systèmes linéaires invariants dans le temps

Nous commencerons par une propriété remarquable des fonctions sinusoïdales : si un système est un système linéaire invariant dans le temps (SLIT) caractérisé par sa réponse impul-

sionnelle $h(t)$, on peut en déduire l'effet d'une entrée $x(t)$ quelconque sous la forme d'une convolution :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau \quad (12)$$

Il existe d'autres formulations que la réponse impulsionnelle pour représenter les SLIT, par exemple sous la forme d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

Exemple : l'évolution de la sortie d'un système du premier ordre, comme la tension $y(t)$ aux bornes d'un condensateur C chargé par une tension $x(t)$ au travers d'une résistance R , peut s'exprimer en utilisant la représentation :

$$RC \frac{dy}{dt} + y(t) = x(t) \quad (13)$$

La réponse impulsionnelle de ce système est obtenue en appliquant à l'entrée une impulsion de Dirac. En supposant que $y(t) = 0$ pour les temps négatifs, on trouve que :

$$\begin{aligned} t < 0 : h(t) &= 0 \\ t \geq 0 : h(t) &= \frac{1}{RC} \exp -t/RC \end{aligned} \quad (14)$$

Si le système est au repos ($y(t) = 0$ pour $t = 0$), il est alors équivalent de résoudre l'équation différentielle ou de calculer le résultat de la convolution de l'entrée $x(t)$ par $h(t)$. Il est aussi possible de représenter les systèmes sous la forme de transformées de Fourier ou de Laplace, ce que nous verrons dans le paragraphe 1.3.1.

Si on applique à un SLIT une entrée sinusoïdale réelle ou complexe de fréquence ω , soit :

$$x(t) = \exp j\omega t \quad (15)$$

la sortie sera une sinusoïde dont l'amplitude et la phase pourront être modifiées, mais qui conservera la même forme (une sinusoïde) et la même fréquence :

$$y(t) = A \exp j(\omega t + \varphi) \quad (16)$$

Exemple : si on émet un son sans harmoniques dans une pièce (une sinusoïde pure), ce son sera modifié mais restera un son à la même fréquence. De même, en transmission hertzienne, l'émission d'une fréquence pure donnera à la réception un signal sinusoïdal à la même fréquence. En termes plus mathématiques, on dit que les sinusoides sont les fonctions propres des SLIT.

1.2.2 Expression de la transformée de Fourier et de son inverse

Du fait de cette propriété, il est utile d'étendre la décomposition en séries de Fourier à l'étude des fonctions non périodiques. Dans ce cas, nous aurons une décomposition sous la forme d'une somme de sinusoides :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp j\omega t d\omega \quad (17)$$

où l'amplitude complexe à la fréquence ω est donnée par la transformée de Fourier :

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp -j\omega t dt \quad (18)$$

La justification de l'expression de la transformée inverse (17) nécessite l'utilisation de la distribution de Dirac ; il faut montrer que :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp j\omega(t-\tau) d\omega \right] d\tau \quad (19)$$

et donc que :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp j\omega t d\omega = \delta(t) \quad (20)$$

parce que la distribution de Dirac vérifie :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau \quad (21)$$

La démonstration est fondée sur la propriété suivante :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp j\omega t d\omega = \frac{1}{2\pi} \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{-\Omega}^{\Omega} \exp j\omega t d\omega \quad (22)$$

où :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \exp j\omega t d\omega = \frac{\sin \Omega t}{\pi t} \quad (23)$$

On montre, en utilisant les propriétés des fonctions de la variable complexe, que la fonction $\frac{\sin \Omega t}{\pi t}$ vérifie :

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \Omega t}{\pi t} dt = 1 \quad (24)$$

On montre aussi que :

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\sin \Omega t}{\pi t} dt = 0 \quad (25)$$

et on en déduit que :

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{\sin \Omega t}{\pi t} dt = x(0) \quad (26)$$

ce qui est la caractérisation de la distribution de Dirac.

L'équation (20) exprime le fait que la distribution de Dirac a pour transformée de Fourier la fonction constante et égale à l'unité.

1.2.3 Principales propriétés de la transformée de Fourier

La plupart des propriétés énoncées ici s'appliquent aussi dans le cas des séries de Fourier.

■ Si un signal est réel :

$$X(\omega) = \overline{X(-\omega)} \quad (27)$$

■ Si de plus on a les symétries :

$$\begin{aligned} x(-t) = x(t) &\Rightarrow X(\omega) = \overline{X(\omega)} \text{ (réel)} \\ x(-t) = -x(t) &\Rightarrow X(\omega) = -\overline{X(\omega)} \text{ (imaginaire pure)} \end{aligned} \quad (28)$$

Les propriétés de symétries (27) et (28) sont souvent utilisées de deux manières : soit pour réduire la quantité de calculs à effectuer soit, ce qui est parfois plus utile, pour vérifier que les calculs sont corrects et que les programmes les ont bien transcrits.

■ Changement de sens du temps :

$$x(-t) \text{ réel a pour transformée } \overline{X(\omega)}$$

■ Transformée de Fourier d'une convolution :

L'importance de ce résultat, qui s'applique à l'analyse des systèmes linéaires invariants dans le temps, et le caractère assez général de cette démonstration justifient son exposé.

Soit :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (29)$$

qui a pour transformée de Fourier :

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \right] \exp -j\omega t dt \quad (30)$$

En supposant qu'il est possible de changer l'ordre des intégrations :

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) \exp -j\omega t dt \right] d\tau \quad (31)$$

et, en introduisant artificiellement :

$$1 = \exp j\omega\tau \exp -j\omega\tau \quad (32)$$

on obtient :

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \exp -j\omega\tau \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) \exp -j\omega t \exp j\omega\tau dt \right] d\tau \quad (33)$$

ou encore, en effectuant le changement de variable $t - \tau = u$:

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \exp -j\omega\tau \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(u) \exp -j\omega u du \right] d\tau \quad (34)$$

qui se factorise en :

$$Y(\omega) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \exp -j\omega\tau d\tau \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(u) \exp -j\omega u du \right] \quad (35)$$

On y reconnaît les transformées de Fourier $X(\omega)$ et $H(\omega)$ des fonctions $x(t)$ et $h(t)$:

$$Y(\omega) = X(\omega) H(\omega) \quad (36)$$

La transformée de Fourier d'une convolution de deux fonctions est le produit des transformées de Fourier de ces deux fonctions.

Ce résultat est un des résultats les plus importants en traitement du signal aussi bien dans les aspects théoriques que dans les applications.

Inversement, la transformée de Fourier d'un produit de fonctions est donnée par la convolution des transformées de ces fonctions.

■ Translation dans le domaine temporel

C'est une convolution avec une impulsion de Dirac retardée.

Soit la fonction $x_\tau(t)$:

$$x_\tau(t) = x(t-\tau) \quad (37)$$

Sa transformée de Fourier est :

$$X_\tau(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) \exp -j\omega t dt \quad (38)$$

En effectuant le changement de variable $u = t - \tau$, on voit que cette transformée s'écrit :

$$X_\tau(\omega) = \exp -j\omega\tau X(\omega) \quad (39)$$

La translation dans le domaine temporel se traduit par un terme correspondant à un déphasage linéaire en fonction de la fréquence ($\exp -j\omega\tau$). Cette opération ne modifie pas le module de la transformée de Fourier.

■ Multiplication par une sinusoïde (modulation), translation en fréquence

Comme la transformée de Fourier et la transformée de Fourier inverse ont la même forme, on a la propriété identique dans le domaine fréquentiel ; le signal :

$$x_{\omega_0}(t) = x(t) \exp j\omega_0 t \quad (40)$$

a pour transformée de Fourier :

$$X_{\omega_0}(\omega) = X(\omega - \omega_0) \quad (41)$$

Cette propriété est fondamentale pour l'interprétation de la modulation des signaux en télécommunications.

Exemple : pour transmettre simultanément plusieurs signaux, $x_a(t)$, $x_b(t)$, $x_c(t)$, on leur applique l'opération de modulation (40), en choisissant pour chacun des trois signaux des fréquences porteuses différentes, ω_a , ω_b et ω_c . Dans le domaine des fréquences, le récepteur reçoit la somme des trois signaux :

$$Y(\omega) = X_a(\omega - \omega_a) + X_b(\omega - \omega_b) + X_c(\omega - \omega_c) \quad (42)$$

Pour retrouver un des signaux, par exemple $x_b(t)$, il doit réaliser l'opération inverse de la modulation (40), la **démodulation**. Par exemple, le récepteur *b* démodule avec la fréquence $-\omega_b$:

$$Y_b(\omega) = X_a(\omega - \omega_a + \omega_b) + X_b(\omega - \omega_b + \omega_b) + X_c(\omega - \omega_c + \omega_b) \quad (43)$$

et élimine, par filtrage, les composantes indésirables $X_a(\omega - \omega_a + \omega_b)$ et $X_c(\omega - \omega_c + \omega_b)$, ce qui permet de retrouver $X_b(\omega)$, soit, dans le domaine temporel, le signal émis $x_b(t)$.

Une illustration en est donnée par la figure 3.

Théorème de Parseval

● L'énergie d'un signal est donnée par la valeur pour $\tau = 0$ de sa fonction d'autocorrélation :

$$r(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\overline{x(t+\tau)} dt \quad (44)$$

c'est l'intégrale de la transformée de Fourier de $r(\tau)$ qui est donnée par $|X(\omega)|^2$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \quad (45)$$

À une constante $1/2\pi$ près, l'énergie du signal peut être calculée aussi bien dans le domaine temporel que dans le domaine fréquentiel : à un facteur de normalisation près, la transformation de Fourier est un opérateur unitaire.

1.2.4 Représentation simultanée des transformées de Fourier des signaux périodiques et des signaux quelconques

On peut être amené à représenter simultanément les transformées de Fourier de signaux périodiques et de signaux quelconques, par exemple dans le cas de l'analyse d'un signal musical enregistré en présence d'un bruit de fond. Dans ce cas, nous représenterons la transformée de Fourier des signaux périodiques sous la forme d'une suite d'impulsions de Dirac aux fréquences ω_k multipliées par une amplitude $X(\omega_k) / 2\pi$ (figure 4).

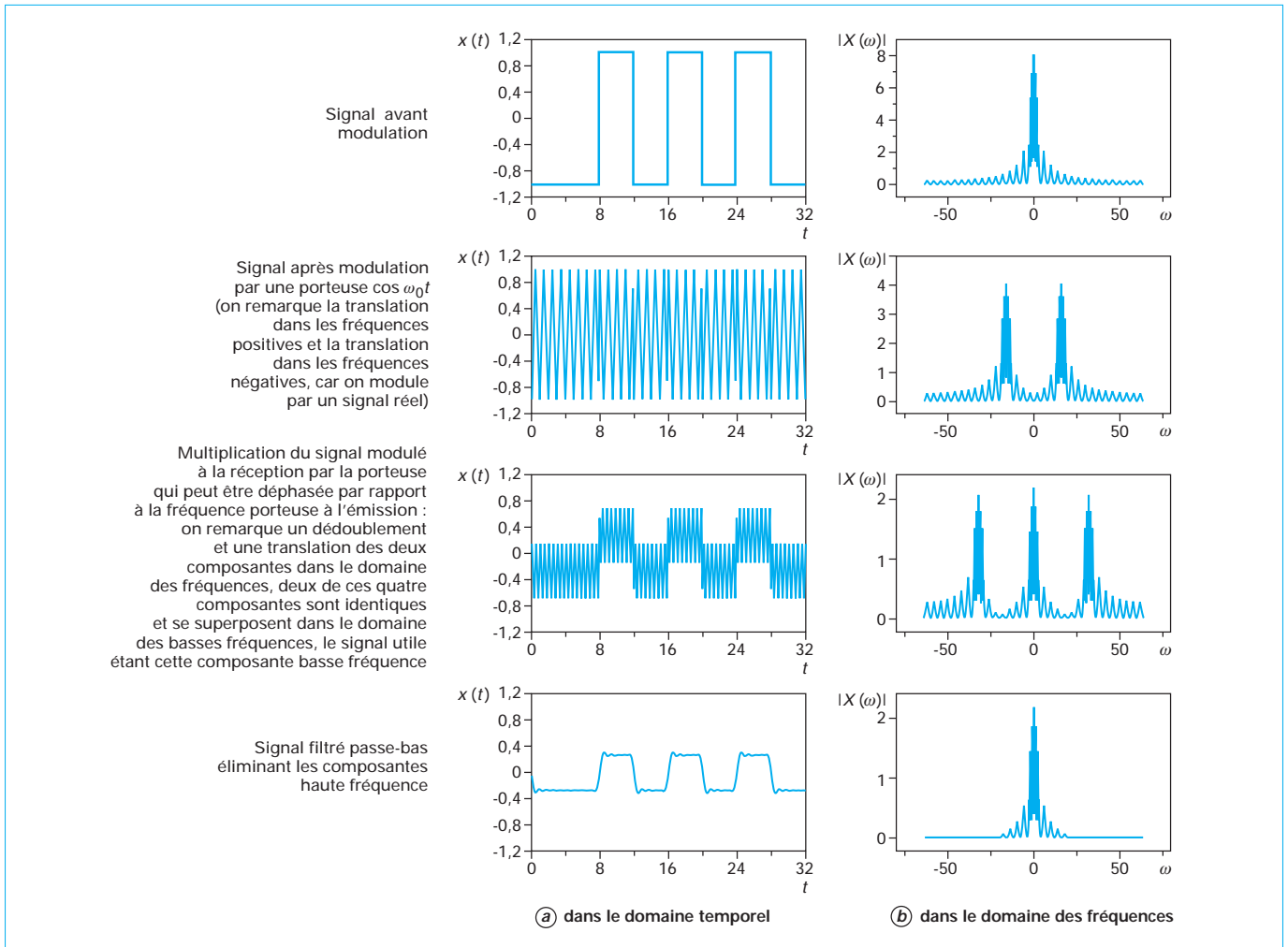


Figure 3 – Illustration des effets d'une modulation d'amplitude

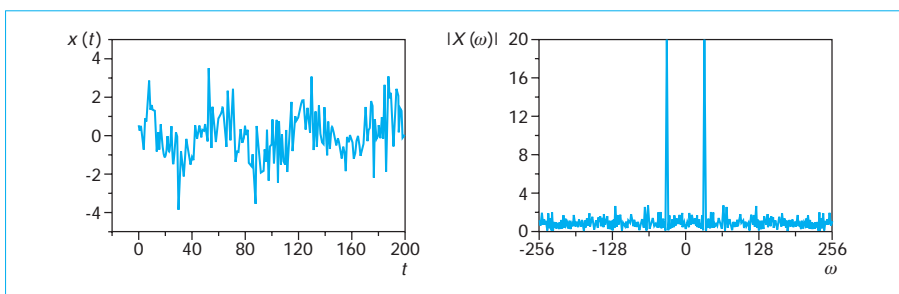


Figure 4 – Analyse spectrale d'un signal composé d'un signal non périodique et d'une fréquence pure : la composante périodique apparaît comme une impulsion dans le domaine des fréquences

1.3 Extensions de la transformée de Fourier

1.3.1 Transformée de Laplace

La transformée de Laplace est une généralisation de la transformée de Fourier à un domaine du plan complexe : au lieu de

la variable imaginaire pure $j\omega$, on utilise la variable complexe p définie en général dans une bande contenant l'axe imaginaire :

$$X(p) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp - p t d t \quad (46)$$

Elle est particulièrement utile en automatique car elle facilite les traitements liés à la causalité et la stabilité, à la représentation de

fonctions de transfert par leurs pôles et leurs zéros. Le calcul de la transformée inverse se ramène souvent au calcul de la transformée de Fourier inverse ou, par décomposition de fractions rationnelles en somme de fractions élémentaires, à des combinaisons linéaires de transformées connues, la plupart du temps des exponentielles qui ont pour transformées de Laplace des fractions rationnelles du premier degré.

Exemple : la fonction nulle pour les temps négatifs et valant $\exp(-\alpha t)$ pour les temps positifs (la partie réelle de α étant positive) a pour transformée $\frac{1}{p + \alpha}$ définie dans le domaine du plan complexe où la partie réelle de p est supérieure à $-\alpha$.

1.3.2 Transformée de Hilbert

En transmission hertzienne, on peut être amené à traiter des signaux (nécessairement complexes) dont les composantes fréquentielles sont nulles pour les fréquences négatives. La partie imaginaire $y(t)$ de la fonction est alors déduite de la partie réelle $x(t)$ en la convoluant avec la partie imaginaire de la transformée de Fourier inverse d'un échelon. C'est sa transformée de Hilbert qui s'exprime sous la forme :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{t-\epsilon} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau + \int_{t+\epsilon}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \right) \quad (47)$$

1.3.3 Analyse temps-fréquence : sonogramme et transformée de Wigner Ville

La transformée de Fourier suppose une décomposition sous la forme d'une somme de sinusoides de fréquence et d'amplitude fixées : cette transformée de Fourier ne fait plus intervenir le temps. Pourtant, certaines applications comme l'analyse des sons, de la musique, des cris d'animaux, nécessitent une analyse en fréquence autorisant une évolution (*a priori* lente) de l'amplitude des composantes fréquentielles. Une approche fruste consiste à découper le signal analysé en tronçons successifs et à appliquer la transformée de Fourier à chacun de ces tronçons. On peut obtenir ainsi une représentation du module du signal en fonction de deux variables : le temps (la position du tronçon) et la fréquence ; cette représentation, le sonogramme ou le spectrogramme, est couramment utilisée pour visualiser les évolutions fréquentielles des signaux comme la parole, les cris d'animaux, les caractéristiques non stationnaires d'éléments mécaniques en rotation. Il est parfois nécessaire d'envisager une représentation plus fine et plus cohérente en fonction du temps et de la fréquence, c'est l'objet de la **transformée de Wigner Ville** :

$$W_x(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \exp -j\omega\tau d\tau \quad (48)$$

1.3.4 Transformée en ondelettes

Elle correspond à une décomposition sur des fonctions de la forme :

$$C_x(a, \tau) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \Psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right) dt \quad (49)$$

pour un choix judicieux de l'« ondelette mère » $\Psi(t)$.

Elle sera décrite, dans un cas particulier, celui de la décomposition des images numériques dans le dossier [AF 1 442].

1.3.5 Utilisation dans le domaine des probabilités : fonction caractéristique

La densité de probabilité d'une somme de variables aléatoires indépendantes est le produit de convolution des densités de

probabilité de ces deux variables. Il est donc utile d'utiliser la transformée de Fourier pour effectuer des calculs portant sur des sommes de variables aléatoires. Dans ce cas, la transformée de Fourier est utilisée sous le nom de fonction caractéristique. Elle permet d'obtenir quelques résultats importants : décroissance en $N^{-1/2}$ de l'écart-type de la moyenne de N variables aléatoires indépendantes, tendance vers la loi gaussienne...

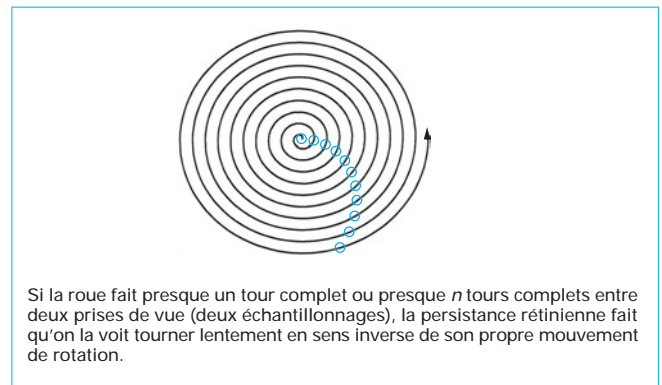
2. Échantillonnage, transformée en z et filtrage numérique

Les précurseurs de l'invention de l'échantillonnage et du développement de la théorie correspondante sont ceux qui se sont intéressés à l'analyse du mouvement au dix-neuvième siècle : les créateurs du stroboscope (Plateau en Belgique et Von Stampfer en Autriche en 1829) ; puis ceux du « chronoscope », un système de prises de vues rapides permettant l'analyse du mouvement, (Muybridge aux USA et Marey en France, vers 1870). Les premières reconstructions de séquences d'images animées sont fondées sur la persistance rétinienne (une image se conserve environ 1/10 de seconde) découverte par Plateau et utilisée dans le stroboscope puis le cinématographe (Edison en 1891 et les frères Lumière en 1895). La formulation mathématique des bonnes conditions d'échantillonnage a été proposée par H. Nyquist en 1928 puis reprise par C. Shannon en 1948, spécialistes des communications des Bell's Labs.

Les résultats fondamentaux sur l'échantillonnage sont bien illustrés par l'effet stroboscopique de ralenti ou de changement de sens de rotation lors de la visualisation d'une roue filmée à 25 images par seconde (figure 5).

2.1 Échantillonnage et analyse spectrale

Le traitement numérique des signaux se fait sur des valeurs discrètes : il n'est pas possible de traiter par ordinateur des signaux à temps continu. Par souci de simplicité, on échantillonne les signaux à un rythme régulier. Une horloge de cadence T_e permet de conserver entre les instants nT_e et $(n+1)T_e$ la valeur qu'avait le signal à l'instant nT_e (figure 6), ce qui permet ensuite de calculer la valeur numérique binaire du signal par une succession d'opérations de comparaisons à des tensions de référence de la forme $v_0 2^{-k}$ et de soustractions.



Si la roue fait presque un tour complet ou presque n tours complets entre deux prises de vue (deux échantillonnages), la persistance rétinienne fait qu'on la voit tourner lentement en sens inverse de son propre mouvement de rotation.

Figure 5 - Interprétation stroboscopique de l'échantillonnage

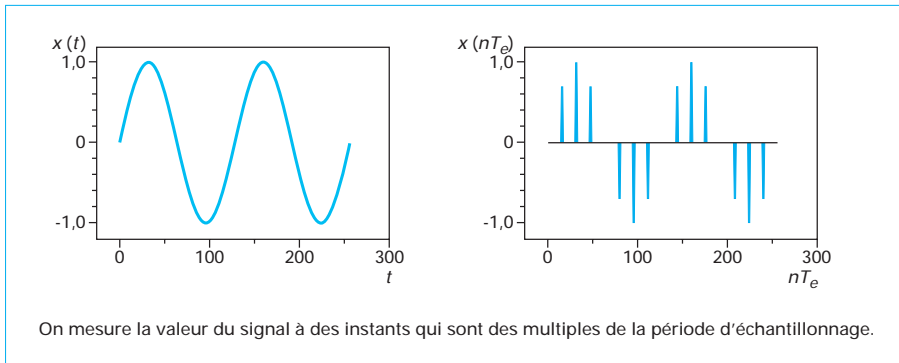


Figure 6 – Illustration de l'échantillonnage d'un signal

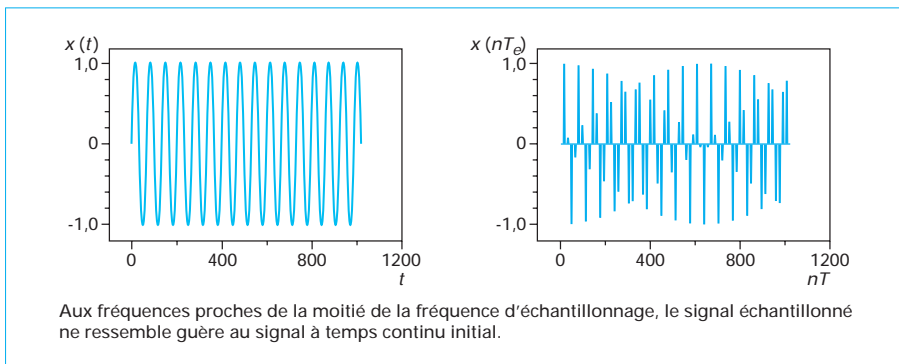


Figure 7 – Version échantillonnée d'une sinusoïde dont la fréquence est légèrement inférieure au quart de la fréquence d'échantillonnage

Si le signal à analyser ne varie pas trop rapidement, et si la cadence d'échantillonnage est suffisamment élevée, on pourra retrouver le signal original à partir du signal échantillonné. Mais il est nécessaire de traduire cela de manière un peu plus formelle, ce qui nous conduira à établir le théorème de Nyquist (ou de Shannon) donnant le lien entre la bande de fréquence occupée par le signal et la cadence d'échantillonnage. Une manière raisonnable de considérer ce problème est de trouver les conditions où il est possible de reconstituer le signal à temps continu à partir des échantillons mémorisés. Ce développement se fait en utilisant une interprétation dans le domaine des fréquences. Nous en déduirons la manière de reconstruire ce signal initial par interpolation entre les échantillons.

Remarque : la représentation graphique d'un signal échantillonné ressemble à celle du signal continu lorsque le signal est dans le domaine des basses fréquences. Toutefois, pour les fréquences élevées, le signal échantillonné ne présente guère de similitude avec le signal original (figure 7).

L'opération d'échantillonnage consiste à mesurer la valeur du signal $x(t)$ à un instant donné (par exemple pour $t=0$), ce qui peut se formaliser en utilisant la distribution de Dirac :

$$x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt \quad (50)$$

De même, la mesure à l'instant nT_e s'écrira :

$$x(nT_e) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-nT_e)dt \quad (51)$$

On peut interpréter le signal échantillonné comme une séquence d'impulsions de Dirac modulées en amplitude par le signal $x(t)$:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_e)\delta(t-nT_e) \quad (52)$$

ou encore sous la forme d'un produit que nous noterons :

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) \times \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT_e) \right) \\ &= x(t)s(t) \end{aligned} \quad (53)$$

Remarque : pour interpréter correctement l'échantillonnage et la reconstruction du signal à temps continu $x(t)$ à partir des échantillons $x(nT_e)$, il faut bien se représenter le signal échantillonné comme cette suite d'impulsions modulées en amplitude séparées par des périodes où le signal est nul, et non sous la forme de créneaux d'amplitude constante $x(nT_e)$ entre les instants d'échantillonnage, qui est le résultat de l'application d'un bloqueur au signal échantillonné. Cette représentation sous la forme d'échelons peut être la source d'une interprétation erronée.

■ Repliement spectral

La représentation (53) est un produit dans le domaine temporel. Elle se traduit donc sous la forme d'une convolution dans le domaine des fréquences. La distribution $s(t)$ est un « peigne » d'impulsions de Dirac régulièrement espacées. Elle admet une

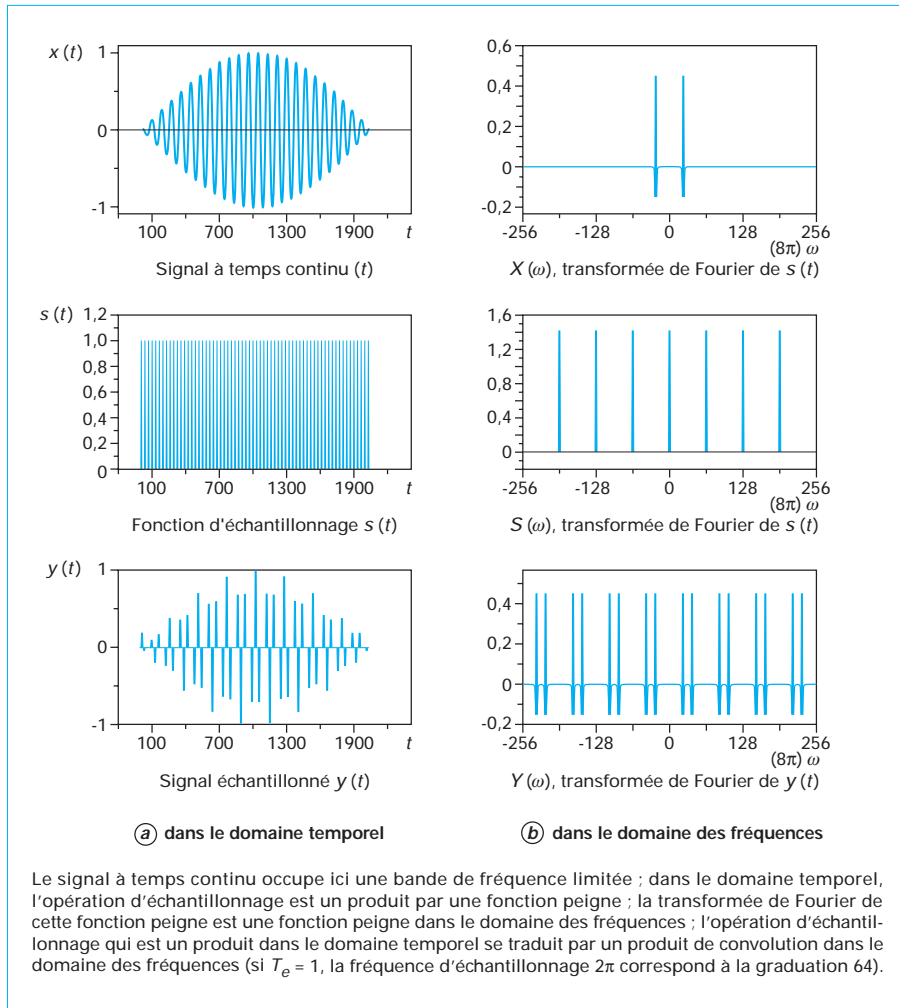


Figure 8 – Interprétation de l'échantillonnage dans le domaine temporel et dans le domaine des fréquences

transformée de Fourier, $S(\omega)$, qui est elle aussi un peigne d'impulsions de Dirac régulièrement espacées, l'écart entre les harmoniques étant $\omega_e = 2\pi/T_e$:

$$S(\omega) = K \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_e) \quad (54)$$

Le coefficient de normalisation K , qui peut être pris égal à T_e^2 pour garantir la conservation de la puissance dans le passage du domaine temporel au domaine fréquentiel, n'a pas de conséquences dans l'interprétation fréquentielle de l'échantillonnage et ne sera pas pris en compte. La transformée d'un produit dans le domaine temporel est une convolution dans le domaine des fréquences. On a donc :

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega - \nu) S(\nu) d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega - \nu) \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - k\omega_e) \right] d\nu \quad (55)$$

La convolution $Y_k(\omega)$ d'une fonction $X(\omega)$ par une impulsion de Dirac décalée en $k\omega_e$ se traduit par une translation de $k\omega_e$:

$$Y_k(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega - \nu) \delta(\nu - k\omega_e) d\nu = X(\omega - k\omega_e) \quad (56)$$

Pour obtenir $Y(\omega)$, on effectue la somme du résultat des convolutions de $X(\omega)$ par les différentes impulsions $\delta(\omega - k\omega_e)$; on en déduit donc :

$$Y(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y_k(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_e) \quad (57)$$

La transformée de Fourier du signal échantillonné s'obtient par addition de reproductions de la transformée de Fourier du signal original identiques en forme mais décalées les unes des autres de ω_e . C'est donc une fonction périodique dont la période est la fréquence d'échantillonnage ω_e (figure 8).

2.1.1 Reconstruction du signal à temps continu à partir des échantillons

L'opération (57) d'addition des reproductions décalées de la transformée de Fourier n'est pas, en général, une opération

réversible : supposons par exemple que le signal à temps continu $x(t)$ est réel et a une composante non nulle aux fréquences $\omega_e/2$ et $-\omega_e/2$. On aura :

$$X(-\omega_e/2) = \overline{X(\omega_e/2)} \quad (58)$$

Lors de l'échantillonnage, on additionnera les répliques décalées de ces composantes, si bien que le résultat sera nécessairement une composante réelle en $(-\omega_e/2)$ et $(\omega_e/2)$: l'information sur la partie imaginaire de $X(\omega_e/2)$ sera perdue.

Pour reconstituer un signal à temps continu à partir de ses échantillons, il faut que le signal continu avant échantillonnage respecte certaines contraintes :

— il ne faut pas qu'une composante à une fréquence ω du signal échantillonné provienne de plusieurs composantes du signal à temps continu dans l'addition des répliques (57) ;

— pour chaque composante du signal échantillonné, il faut connaître la bande de fréquence de largeur ω_e dont elle était originaire dans le signal à temps continu.

La contrainte la plus naturelle qu'on peut imposer au signal (réel) à temps continu et qui satisfait ces conditions est de le limiter en fréquence par un filtrage linéaire pour s'assurer que sa transformée de Fourier est nulle en dehors de la bande de fréquences $]-\omega_e/2, \omega_e/2[$ (figure 9).

■ Théorème de Nyquist-Shannon

On peut reconstruire le signal à temps continu à partir de ses échantillons si la bande de fréquence occupée par un signal *réel* est inférieure à la moitié de la fréquence d'échantillonnage. Alors, les répliques de $X(\omega)$ ne se chevauchent pas et on connaît la bande de fréquence initiale du signal $x(t)$.

Dans le cas des signaux complexes, il n'y a pas nécessairement symétrie de l'amplitude des composantes pour les fréquences positives ou négatives. Dans ce cas, la reconstruction correcte suppose que la largeur de la bande de fréquence (incluant les fréquences positives et négatives) occupée par le signal soit inférieure à la fréquence d'échantillonnage.

La fréquence d'échantillonnage doit ainsi être adaptée à la bande de fréquence occupée par le signal.

Exemple : Il apparaît que le signal vocal est clairement intelligible si on le réduit à une bande de fréquence de 0 à 4 kHz. En conséquence, la parole en téléphonie numérique est échantillonnée à 8 kHz. L'oreille peut être sensible aux sons jusqu'à 20 kHz, ce qui amène les systèmes numériques de transmission et de mémorisation de son haute fidélité à échantillonner les signaux à 44,1 kHz.

La persistance de l'image sur la rétine est de l'ordre du dixième de seconde. Le débit de prise de vues au cinéma est de 24 images par seconde et de 25 images par seconde en vidéo.

Un signal vidéo SECAM (pour la luminance seulement) est composé de 576 lignes de 720 échantillons (ou pixels) par trame (par image).

Remarque : l'échantillonnage peut être interprété comme une modulation du signal analogique par différentes porteuses aux fréquences multiples de la fréquence d'échantillonnage. On peut utiliser cette observation pour moduler et démoduler des signaux en transmission numérique.

■ Reconstruction idéale

Si les hypothèses d'application du théorème de Shannon sont vérifiées, il y a une relation bijective entre les composantes fréquentielles du signal à temps continu et celles du signal échantillonné qui sont dans la bande $]-\omega_e/2, \omega_e/2[$ et on connaît la bande de fréquences du signal original. Pour reconstituer $x(t)$, il suffit de filtrer le signal échantillonné, $y(t)$, par un filtre $H(\omega)$ dont la réponse en fréquence est constante et vaut $2\pi/\omega_e$ dans la bande $]-\omega_e/2, \omega_e/2[$, et vaut zéro en dehors de cette bande. La réponse

impulsionnelle de ce filtre s'obtient par transformée de Fourier inverse du créneau :

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) \exp(j\omega t) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_e/2}^{\omega_e/2} \frac{2\pi}{\omega_e} \exp(j\omega t) d\omega \end{aligned} \quad (59)$$

soit :

$$h(t) = \frac{\sin(\pi t/T_e)}{\pi t/T_e} \quad (60)$$

Cette réponse impulsionnelle n'est pas causale et elle tend relativement lentement vers zéro lorsque t tend vers l'infini (figure 10). Son utilisation pratique ne peut être que rarement envisagée : il faut accepter un retard conséquent dans la reconstruction du signal à temps continu, et effectuer une quantité de calculs importante du fait de la lenteur de la convergence du calcul du signal reconstitué par la formule :

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \frac{\sin(\pi(t-k)/T_e)}{\pi(t-k)/T_e} \quad (61)$$

On remarque que, aux instants d'échantillonnage, il n'y a qu'un seul terme non nul dans la somme (61) : pour $t = T_e$, le signal reconstitué $y(t)$ est bien égal à la valeur de l'échantillon $x(T_e)$ (figure 11). Le décalage temporel d'une fraction d'échantillon nécessite la reconstruction par la formule d'interpolation (61), ce qui peut faire apparaître un phénomène de Gibbs.

■ Reconstruction effective des signaux à temps continu

S'il est possible de retarder le signal d'une durée D lors de la reconstitution, on peut tenter d'approximer la réponse impulsionnelle $h(t)$ en utilisant un filtre passe-bas causal dont la réponse en fréquence est aussi proche que possible de $H(\omega) \exp(-j\omega D)$. Il est parfois suffisant de se contenter d'un simple blocage du signal à la sortie du convertisseur numérique/analogique et d'appliquer à ce signal bloqué (qui est une suite d'échelons) un filtre passe-bas dont la fréquence de coupure est la moitié de la fréquence d'échantillonnage. Cependant, cette méthode simple ne permet pas de reconstruire les composantes de fréquence élevée, proche de $\omega_e/2$. On peut aussi effectuer une interpolation linéaire entre les échantillons, ce qui nécessite de retarder le signal reconstitué d'un échantillon. Cette méthode distord un peu moins le signal que la méthode précédente, mais là encore la reconstruction est loin d'être parfaite. Les fréquences dans le voisinage de la moitié de la fréquence d'échantillonnage sont mal reconstituées et il y a encore des composantes parasites au-delà de la moitié de la fréquence d'échantillonnage.

Un bon compromis dans la reconstruction est d'accepter de retarder le signal à reconstituer d'une durée D et d'interpoler les signaux avec une fonction $\frac{\sin \pi t}{\pi t}$ tronquée entre $-D$ et $+D$ et retardée de D . La qualité de la reconstruction dépendra alors de la valeur de D . Plus D sera grand, meilleure sera la reconstruction. C'est un des éléments dont dépend la qualité de la restitution du son numérique.

2.2 Transformée en z

L'étude des signaux échantillonnés utilise intensivement un outil mathématique efficace pour la représentation des séries temporelles. C'est la transformée en z , qui est une extension de la transformée de Fourier tout à fait analogue à la transformée de Laplace, mais plus facile à utiliser. Elle permet l'interprétation des caractéristiques des signaux et des filtres dans le domaine des fréquences.

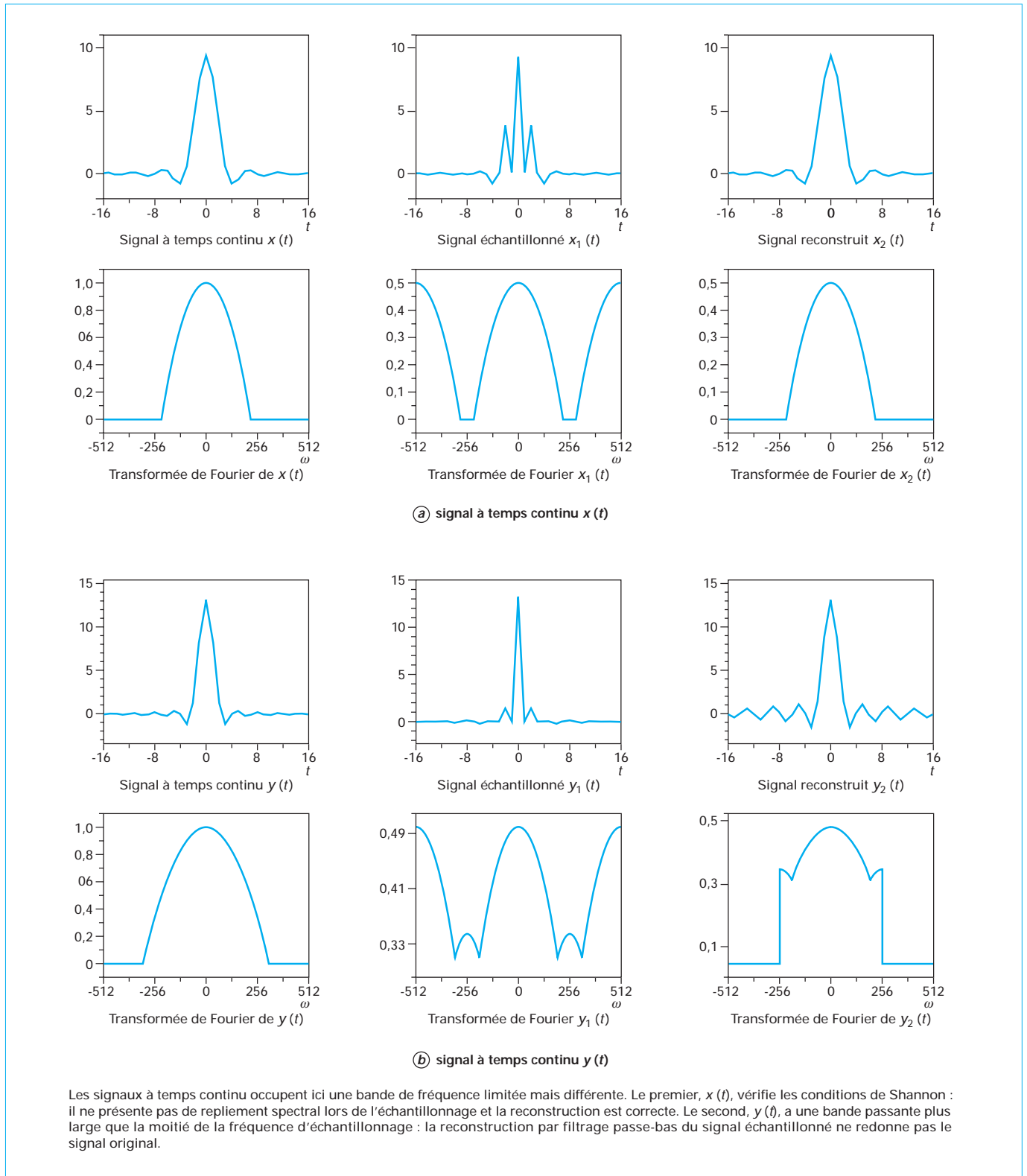


Figure 9 - Interprétation de la reconstruction des signaux dans le domaine temporel et dans le domaine des fréquences

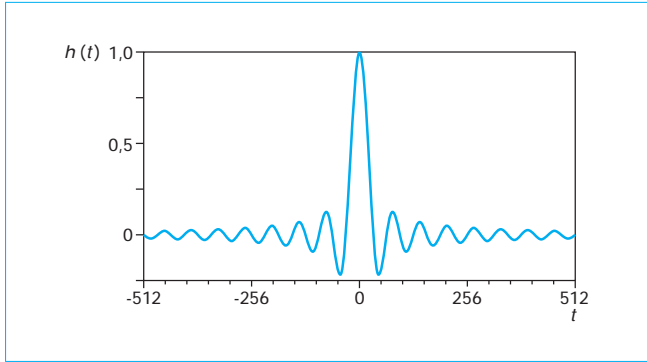
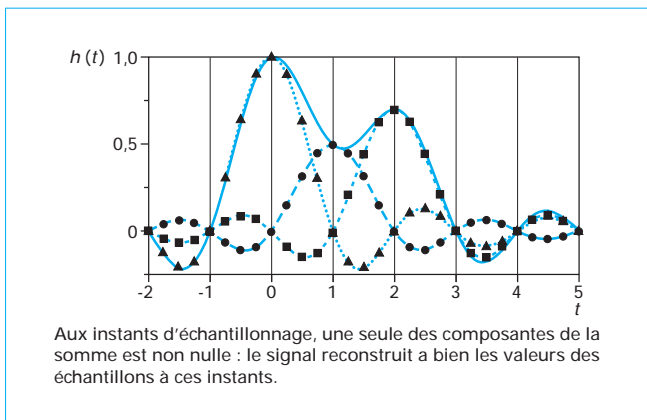


Figure 10 – Fonction d’interpolation idéale de la forme $\frac{\sin \pi t}{\pi t}$ pour la reconstruction d’un signal à temps continu à partir de ses échantillons



Aux instants d’échantillonnage, une seule des composantes de la somme est non nulle : le signal reconstruit a bien les valeurs des échantillons à ces instants.

Figure 11 – Reconstruction d’un signal à partir de trois échantillons en utilisant le filtre idéal

Dans la suite, nous supposons que le pas d’échantillonnage T_e est égal à 1.

La « transformée en z bilatérale » $X(z)$ d’un signal échantillonné $x(t)$ est :

$$X(z) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} x(t) z^{-t} \quad (62)$$

avec z variable complexe.

C’est la somme d’une série temporelle qui n’est définie que pour les valeurs de z à l’intérieur du domaine où la série (62) converge, en général une couronne de rayon intérieur r_1 et de rayon extérieur r_2 .

Exemple : soit le signal $x(t)$ représenté sur la figure 12a :

$$\begin{aligned} t \leq 0 : x(t) &= b^{-t} \\ t \geq 0 : x(t) &= a^t \end{aligned} \quad (63)$$

avec a et b deux nombres complexes de module inférieur à un.

$X(z)$ s’obtient par sommation de deux séries géométriques et vaut :

$$X(z) = \sum_{t=0}^{\infty} a^t z^{-t} + \sum_{t=0}^{\infty} b^{-t} z^{-t} - 1 \quad (64)$$

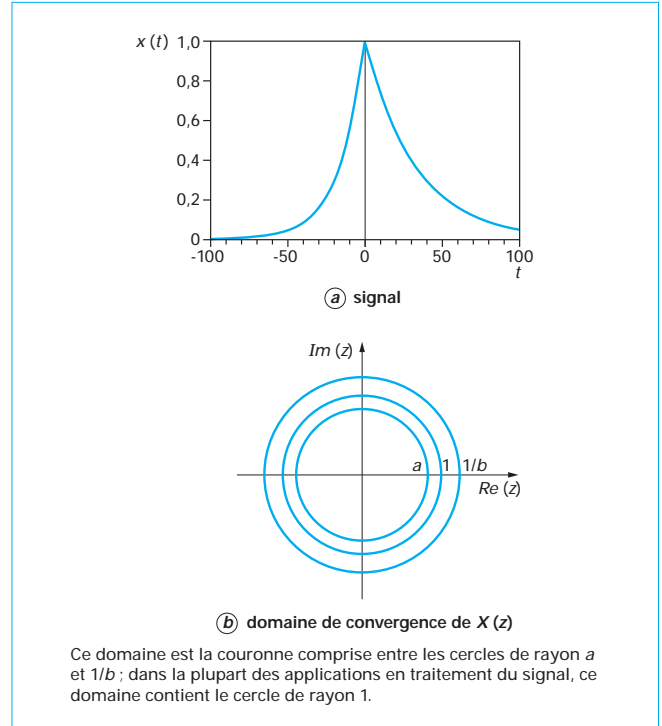


Figure 12 – Exemple de fonction simple pour un calcul de transformée en z par calcul de série géométrique

Elle n’est définie que si ces séries convergent. La première série converge si $|a| < |z|$. La seconde série ne converge que si $|z| < 1/|b|$. La couronne de convergence dans le plan complexe est comprise entre les cercles de rayon $|a|$ et $1/|b|$ (figure 12b). On a alors :

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} + \frac{1}{1 - bz} - 1 \quad (65)$$

Souvent, les expressions des fractions transformées en z utilisées en traitement du signal sont des fractions rationnelles de la variable z . On appelle « pôles » les racines du dénominateur de la transformée et « zéros » les racines de son numérateur. Dans de nombreux calculs, les pôles sont simples. Il est alors possible d’écrire les transformées sous la forme d’une décomposition en éléments simples de cette fraction rationnelle. La transformée s’écrit ainsi sous la forme d’une somme de fractions dont le dénominateur est de degré un dans le cas des fonctions à coefficients complexes et de degré deux dans le cas des fonctions à coefficients réels. Cela permet de retrouver la plupart des transformées simples.

Exemple le plus courant de transformée utilisée en traitement du signal

C’est la transformée de la fonction $x(t)$ nulle pour $t < 0$ et valant :

$$x(t) = a^t \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (66)$$

pour $t \geq 0$, a étant un réel positif inférieur à un (figure 13).

Dans ce cas, $X(z)$ est définie à l’extérieur du disque de rayon $|a|$ et vaut :

$$X(z) = \frac{\cos(\varphi) - az^{-1} \cos(\omega_0 - \varphi)}{1 - 2a \cos(\omega_0) z^{-1} + a^2 z^{-2}} \quad (67)$$

Elle a deux pôles complexes conjugués $a \exp j\omega_0$ et $a \exp -j\omega_0$ et un zéro réel $a \cos(\omega_0 - \varphi)/\cos \varphi$.

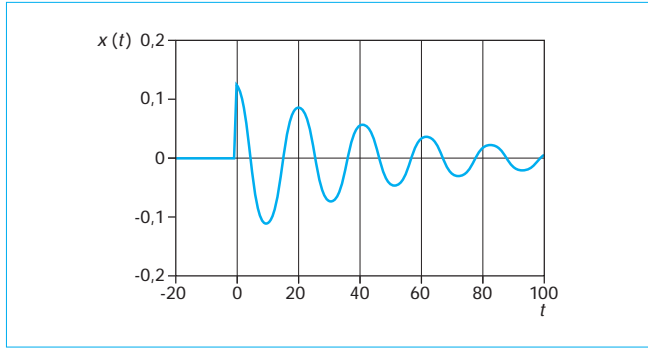


Figure 13 – Exemple de fonction couramment utilisée en traitement du signal : la sinusoïde amortie

■ Remarques sur le domaine de convergence

La plupart du temps, le domaine de convergence de la transformée en z est une couronne qui contient le cercle de rayon un, les fonctions étudiées tendant souvent vers zéro comme une fonction exponentielle lorsque $t \rightarrow \pm \infty$. Si $x(t)$ est causal (nul pour les temps négatifs), le rayon extérieur de la couronne, r_2 , est infini. Si $x(t)$ est non causal (nul pour les temps positifs et en zéro), son rayon intérieur est nul, $r_1 = 0$. Si $x(t)$ est non nul seulement pour un nombre fini d'échantillons, r_1 est nul et r_2 est infini et $X(z)$ est un polynôme défini dans tout le plan complexe sauf à l'origine.

Le choix de la variable z^{-1} , et non z , est cohérent avec la définition de la transformée de Fourier. Cet opérateur représente le retard d'un échantillon. Il incite souvent à écrire les transformées des signaux causaux (nuls pour les valeurs négatives de t) en fonction de z^{-1} et non de z . Lorsque le signal est non causal (lorsqu'il a des composantes uniquement lorsque $t < 0$), on écrit souvent ces composantes en fonction de la variable z . Cependant, la notion de causalité est contenue dans le domaine de convergence et non dans la formule donnant la transformée en z qui peut s'écrire aussi bien en fonction de la variable z que de la variable z^{-1} .

2.2.1 Propriétés de la transformée en z

Notons que la transformée en z est une opération linéaire.

■ Décalage des signaux d'un nombre entier d'échantillons

L'avance d'un signal de k échantillons correspond à une multiplication de $X(z)$ par z^k . Le retard de k échantillons se traduit par une multiplication de $X(z)$ par z^{-k} . Le décalage d'une fraction d'échantillon ne peut pas s'exprimer directement, il nécessite une interpolation (61).

Si $x(t)$ est composé d'un seul échantillon non nul, sa transformée en z est un monôme :

$$t \neq 0 : x(t) = 0 \quad (68)$$

$$x(n) = a \quad (69)$$

Alors, d'après la définition de la transformée en z :

$$X(z) = az^{-n} \quad (70)$$

La transformée d'un signal nul pour les temps négatifs (causal) de durée finie $(0, \dots, n)$ est un polynôme de degré n en z^{-1} .

■ Transformée d'une convolution discrète

L'opération de base en traitement numérique du signal est la convolution discrète $y(t)$ entre deux signaux $x(t)$ et $h(t)$. Elle s'écrit :

$$y(t) = \sum_{\tau = -\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) \quad (71)$$

C'est une opération commutative et on peut aussi l'écrire :

$$y(t) = \sum_{\tau = -\infty}^{\infty} x(t - \tau) h(\tau) \quad (72)$$

forme qu'il sera préférable d'utiliser en filtrage numérique. Sa transformée en z est :

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad (73)$$

La démonstration est semblable à celle donnant la transformée de Fourier d'une convolution.

En ce qui concerne les rayons de convergence, $Y(z)$ est définie sur l'intersection des deux couronnes où $X(z)$ et $H(z)$ sont définies.

Ce résultat traduit aussi que les coefficients d'un polynôme produit de deux polynômes sont obtenus par convolution des séquences des coefficients des deux polynômes.

2.2.2 Inverse de la transformée en z

Importance du domaine de définition

La plupart du temps, l'utilisateur de méthodes de traitement numérique du signal se contente de retrouver, grâce à une table, la forme d'une transformée en z inverse. Pour cela, on effectue les opérations suivantes. Nous supposons que $X(z)$ s'écrit sous la forme d'une fraction rationnelle, soit :

$$X(z) = P(z) + \frac{N(z)}{D(z)} \quad (74)$$

où le degré de $N(z)$ est inférieur au degré q de $D(z)$.

Nous supposons que les q racines z_i du dénominateur $D(z)$ sont distinctes :

$$D(z) = \prod_{i=1}^q (z - z_i) \quad (75)$$

$$i \neq k \Rightarrow z_i \neq z_k \quad (76)$$

On peut alors écrire $X(z)$ sous la forme :

$$X(z) = P(z) + \sum_{i=1}^q \frac{\beta_i}{z - z_i} \quad (77)$$

Les transformées inverses des termes de la somme étant connues, on en déduit celle de $X(z)$. Le « résidu » β_i du pôle z_i peut se calculer de différentes manières :

$$\beta_i = \left[\frac{N(z)}{\frac{dD(z)}{dz}} \right]_{z=z_i} = \lim_{z \rightarrow z_i} (z - z_i) \frac{N(z)}{D(z)} \quad (78)$$

Le cas où les racines sont multiples est plus compliqué. Le lecteur pourra consulter un ouvrage de mathématiques sur les fonctions de la variable complexe.

On néglige souvent de se préoccuper du domaine de convergence de la transformée en z car, en traitement numérique du signal, on considère souvent implicitement que le domaine de convergence est une couronne contenant le cercle de rayon 1. On

peut toutefois montrer sur un exemple l'importance de ce domaine de convergence.

Exemple : soit la fonction :

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad (79)$$

Si elle est définie à l'extérieur du disque de rayon $|a|$ (on suppose que $|a| < 1$), la fonction qui a $X(z)$ pour transformée en z est :

$$\begin{aligned} t < 0 : x(t) &= 0 \\ t \geq 0 : x(t) &= a^t \end{aligned} \quad (80)$$

Au contraire, si le domaine de convergence est le disque intérieur au cercle de rayon $|a|$, le développement (80) n'est plus autorisé, car $az^{-1} > 1$ et le développement correct est celui de :

$$X'(z) = \frac{-a^{-1}z}{1 - a^{-1}z} \quad (81)$$

Il est nul pour les temps strictement positifs et vaut :

$$t < 0 : x(t) = -a^t \quad (82)$$

2.2.3 Relation avec la transformée de Fourier

La transformée de Fourier $Y(\omega)$ d'un signal à temps continu $x(t)$ échantillonné en $y(t)$ est une fonction périodique obtenue par addition de répliques translatées de $\omega_e = 2\pi$ (nous supposons que la période d'échantillonnage est égale à 1) :

$$Y(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - 2k\pi) \quad (83)$$

On peut aussi écrire cette fonction comme étant la transformée de Fourier de la séquence des échantillons $x(n)$:

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \delta(t-n) \right] \exp -j\omega t dt \quad (84)$$

$$Y(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \exp -j\omega n = X(\exp j\omega) \quad (85)$$

La valeur de la transformée de Fourier $Y(\omega)$ du signal échantillonné $y(t)$ est donnée par la valeur de sa transformée en z sur le cercle de rayon 1 (pour $z = \exp j\omega$). La graduation en fréquence du cercle est linéaire (figure 14).

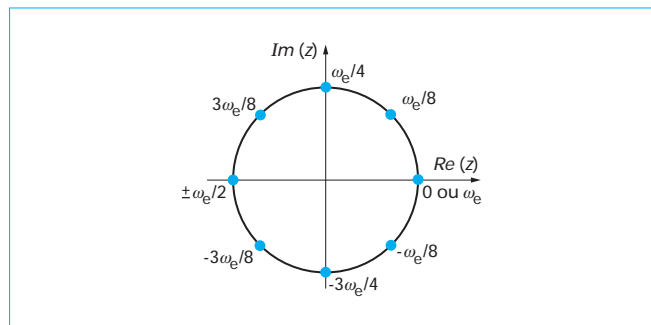


Figure 14 - Graduation du cercle de rayon 1 en fonction de la fréquence d'échantillonnage lors de la mise en correspondance de la transformée en z et de la transformée de Fourier

2.3 Filtrage numérique

Une des fonctions fondamentales en traitement du signal à temps continu est le filtrage linéaire effectué par des dispositifs électroniques à base d'amplificateurs opérationnels. L'avènement du traitement numérique a conduit à une amélioration importante de ces dispositifs en termes de fiabilité, de reproductibilité, de souplesse et de complexité des fonctions réalisables. Les traitements seront maintenant réalisés grâce à des additionneurs et des multiplieurs numériques, et des mémoires. La précision peut être améliorée indéfiniment : il suffit d'augmenter la taille des mémoires ; deux circuits de filtrage identiques donneront exactement le même résultat, ce qui n'est pas le cas pour les traitements analogiques. Dans la mesure où la cadence minimale d'échantillonnage n'est pas trop élevée, les coûts de fabrication des unités de traitement numérique diminuant, les industriels sont amenés à utiliser de plus en plus souvent les filtres numériques dans les applications. Les filtres numériques présentent une flexibilité qu'il est difficile voire impossible de mettre en œuvre dans le cas des filtres analogiques.

Notons que des applications dont l'importance économique est considérable utilisent intensivement le filtrage numérique en temps réel (transmissions et téléphonie numériques, codage des sons MP3, des images JPEG et des vidéos MPEG, codage et synthèse de parole, télévision numérique par exemple).

2.3.1 Rappel sur la convolution discrète. Réponse en fréquence d'un filtre

Soit l'opération de convolution discrète de $x(t)$ par $h(t)$ (ou filtrage linéaire) par le filtre à réponse impulsionnelle $h(t)$:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t-k) h(k) \quad (86)$$

Dans le domaine des transformées en z , cette opération devient un produit :

$$Y(z) = X(z)H(z) \quad (87)$$

Si l'on fixe $z = \exp j\theta$ (sur le cercle de rayon 1), on obtient le cas particulier de la transformée de Fourier. Ainsi, pour amplifier, atténuer, déphaser un signal, il suffira de trouver les coefficients de la réponse impulsionnelle du filtre $h(t)$, ou de sa réponse en fréquence $H(\exp j\theta)$ définie en module et en phase pour toutes les fréquences entre $-\pi$ et π et de programmer un calculateur numérique pour effectuer le calcul de convolution.

2.3.2 Filtres à réponse impulsionnelle finie ou filtres non récursifs

L'équation (86) suppose une infinité de calculs et on sera donc amené à programmer, dans le cas des filtres causaux, une somme sur un nombre fini d'échantillons :

$$y(t) = \sum_{k=0}^q x(t-k) b(k) \quad (88)$$

La transformée en z de la séquence b_0, \dots, b_q est :

$$B(z) = \sum_{t=0}^q b(t) z^{-t} \quad (89)$$

C'est un polynôme de degré q en z^{-1} . Ce type de filtre ne pose jamais de problème de convergence des calculs (de stabilité).

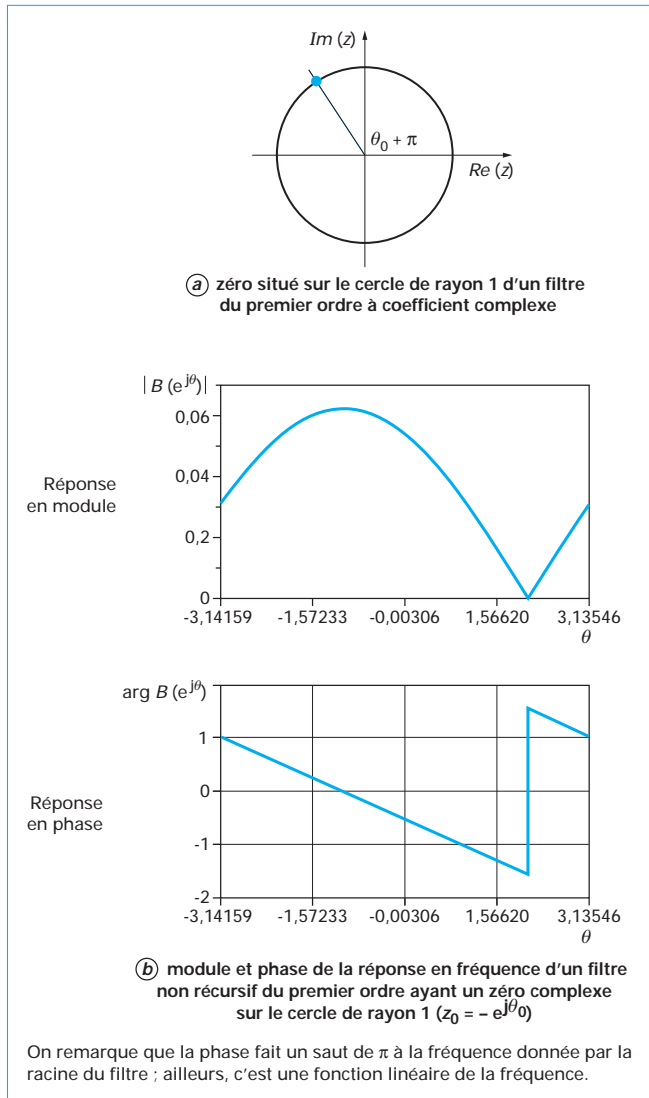


Figure 15 – Effet du filtre dans le domaine des fréquences

2.3.3 Interprétation de l'effet du filtre dans le domaine des fréquences

La valeur de la réponse en fréquence du filtre $B(z)$ est donnée par la valeur de $B(\exp j\theta)$ sur le cercle de rayon 1, θ variant de $-\pi$ à π , ce qui correspond à une variation de $-\omega_e/2$ à $\omega_e/2$ où ω_e est la fréquence d'échantillonnage.

Considérons un cas particulier où $B(z)$ est le filtre à coefficients complexes d'ordre $q = 1$ (figure 15a) :

$$B(z) = 1 + z^{-1} \exp j\theta_0 \tag{90}$$

$zB(z)$ a une seule racine complexe située sur le cercle de rayon 1 :

$$z_0 = -\exp j\theta_0 \tag{91}$$

et $B(\exp j\theta)$ s'annulera pour $\theta = \theta_0 + \pi$.

L'allure de la réponse en fréquence, en module et en phase est représentée sur la figure 15b. Si θ_0 est proche de π , on supprime

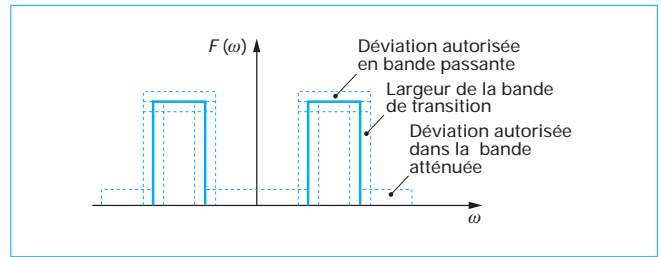


Figure 16 – Exemple de gabarit d'un filtre passe-bande

une composante fréquentielle dans le domaine des basses fréquences. Si θ_0 est proche de 0, on supprime une composante dans le domaine des hautes fréquences, etc. Si la racine z_0 est de module différent de 1 mais proche de 1, il y aura atténuation des amplitudes dans ce domaine au voisinage de $\theta_0 + \pi$, mais il n'y aura pas annulation complète de la composante. L'effet d'un filtre de degré q se traduira par l'effet du produit de q facteurs de ce type.

2.3.4 Notions sur la synthèse des filtres numériques

Sans entrer dans les détails de synthèse, voyons comment il est possible de concevoir des filtres simples. Le lecteur cherchant des approfondissements sur ces techniques pourra se référer aux ouvrages de M. Bellanger et de R. Boite et H. Leich (cf. [Doc. AF 1 442]).

Un filtre est conçu à partir d'une réponse en fréquence idéale avec des marges d'erreur autorisées (un gabarit, figure 16) ; on ne peut pas réaliser un filtre parfait dont la réponse impulsionnelle est de durée finie, il faut s'en approcher le plus possible et se donner les bornes acceptables sur la différence. Une manière élémentaire de procéder est de se donner le filtre idéal à réaliser dans le domaine des fréquences $F(\omega)$, de revenir dans le domaine temporel en calculant la transformée de Fourier inverse soit $f(t)$. Cette fonction $f(t)$ n'est en général pas causale et la réalisation effective du filtre nécessitera un retard. On remplace la fonction $f(t)$, en général de durée infinie, par une fonction de durée finie $g(t)$ en multipliant $f(t)$ par une fonction de pondération (figure 17) que nous décrivons dans le dossier [AF 1 442]. Une transformée de Fourier appliquée au résultat permet de vérifier si le filtre satisfait les contraintes du gabarit dans le domaine des fréquences.

2.3.5 Filtres à réponse impulsionnelle infinie ou filtres récursifs

Il est possible, dans un cas particulier, de réaliser des filtres dont la réponse impulsionnelle a un nombre infini d'échantillons, mais cela nécessite l'expression de la sortie du filtre sous la forme d'une équation récurrente liant $y(t)$ aux échantillons précédemment calculés $y(t-1), y(t-2), \dots$, et aux échantillons du signal d'entrée, $x(t)$.

Considérons, par exemple, l'équation récurrente suivante, en supposant que les valeurs des conditions initiales $y(-1), y(-2), \dots, y(-p)$ sont nulles :

Pour $t \geq 0$:

$$y(t) = x(t) - \sum_{i=1}^p a(i)y(t-i) \tag{92}$$

On définit le polynôme :

$$A(z) = \sum_{i=0}^p a(i)z^{-i} \text{ où } a(0) = 1 \tag{93}$$

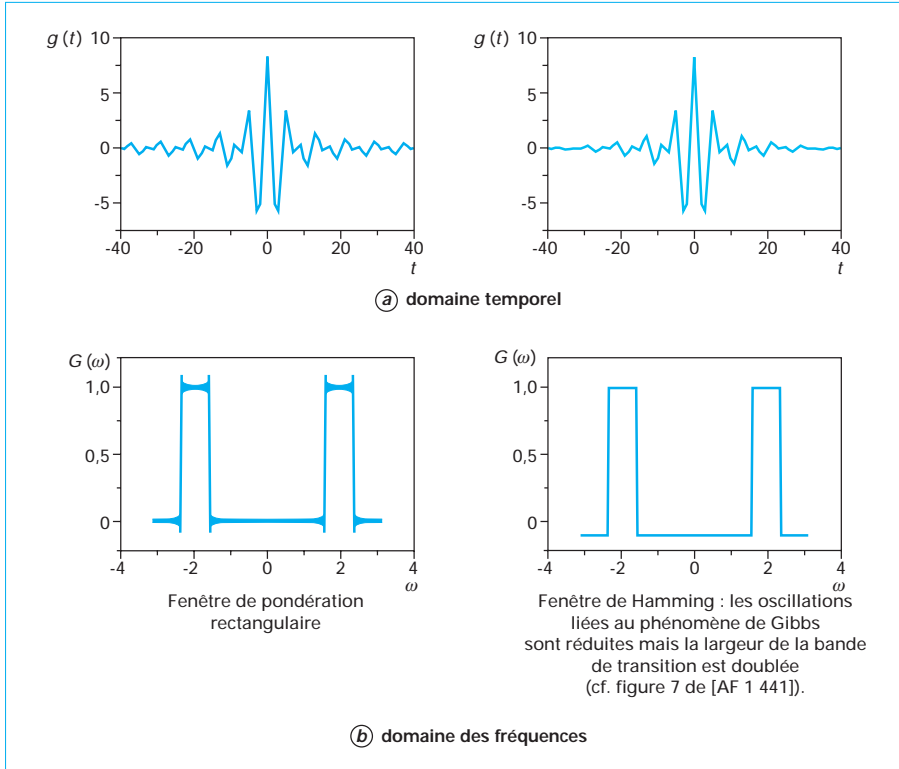


Figure 17 – Effet de la troncature de la réponse impulsionnelle d’un filtre par application d’une fenêtre de pondération rectangulaire et une fenêtre de Hamming

Dans le domaine des transformées en z, la réponse du filtre n’est plus un polynôme mais une fraction rationnelle :

$$Y(z) = \frac{1}{A(z)} X(z) \tag{94}$$

Ce filtre est instable lorsque ses pôles ne sont pas à l’intérieur du cercle de rayon 1. La position des pôles caractérise les fréquences et les amortissements des résonances du filtre. Une forme typique de réponse impulsionnelle de filtre récursif est présentée sur la figure 13.

2.3.6 Dérivation et échantillonnage

Il paraît intéressant de présenter ce cas afin d’illustrer les possibilités offertes par le traitement correct des signaux échantillonnés, qui a des effets relativement différents des approximations habituellement utilisées.

L’opération de dérivation est souvent approximée par la différence entre deux échantillons successifs :

$$\frac{df}{dt} \approx \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \tag{95}$$

Cette approximation est acceptable lorsque les variations de $f(t)$ sont lentes, mais n’a aucune pertinence pour des variations rapides. Il est possible de donner une expression exacte de la dérivée lorsque les conditions d’application du théorème de Shannon sont vérifiées.

Soit $F(\omega)$ la transformée de Fourier de $f(t)$. Nommons $g(t)$ la fonction dérivée de $f(t)$. La transformée $G(\omega)$ de $g(t)$ est un produit :

$$G(\omega) = j\omega F(\omega) \tag{96}$$

Dans le domaine temporel, pour des signaux échantillonnés, la dérivation est une convolution discrète ; les échantillons de l’opérateur $v(t)$ de dérivation s’obtiennent en calculant la transformée inverse de $j\omega$:

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} j\omega d\omega \tag{97}$$

soit :

$$v(0) = 0 \tag{98}$$

et pour $t \neq 0$:

$$v(t) = \frac{-(-1)^t}{t} \tag{99}$$

ce qui donne la formule exacte des échantillons de la dérivée **aux instants d’échantillonnage** :

$$\frac{df}{dt} = \frac{f(t+1) - f(t-1)}{1} - \frac{f(t+2) - f(t-2)}{2} + \frac{f(t+3) - f(t-3)}{3} - \dots \tag{100}$$

Notons toutefois que cette formule ne permet pas d’assurer la causalité nécessaire dans un grand nombre de calculs récursifs fondés sur les calculs de dérivées.

De même, le calcul d’une dérivée seconde s’obtient en calculant $-\omega^2 F(\omega)$, ce qui donne comme formule :

$$\frac{d^2f}{dt^2} = -\frac{\pi^2}{3} f(t) + 2 \frac{f(t+1) + f(t-1)}{1} - 2 \frac{f(t+2) + f(t-2)}{2^2} + 2 \frac{f(t+3) + f(t-3)}{3^2} - \dots \tag{101}$$