

La transformée de Fourier et ses applications (partie 3)

par Joël LE ROUX
École polytechnique universitaire (EPU)
Université de Nice Sophia-Antipolis

1.	Échantillonnage et filtrage numérique des signaux 2D	AF 1 442 - 2
1.1	Échantillonnage rectangulaire ou carré	— 2
1.2	Représentation fréquentielle des signaux discrets bidimensionnels.....	— 4
1.3	Transformée de Fourier discrète ou DFT	— 4
1.4	Filtrage des signaux bidimensionnels	— 5
1.5	Filtres miroir en quadrature et transformée en ondelettes.....	— 6
1.6	Signaux aléatoires bidimensionnels. Estimation spectrale des signaux bidimensionnels	— 9
2.	Quelques problèmes de traitement de signaux multidimensionnels	— 9
2.1	Problèmes liés à la propagation d'ondes	— 10
2.2	Reconstitution d'images à partir de projections	— 12
2.3	Imagerie par résonance magnétique nucléaire	— 15
2.4	Transformée de Fourier et propagation d'ondes en optique cohérente ou en électromagnétisme	— 16
2.5	Filtrage et détection de contours	— 18
2.6	Conclusion.....	— 19
	Pour en savoir plus.....	Doc. AF 1 442

Cette troisième partie de l'exposé sur la transformée de Fourier se base sur les notions présentées dans [AF 1 441] § 2 et sur l'extension multidimensionnelle d'outils décrits dans [AF 1 440] et dans [AF 1 441], § 1.

Elle montre la mise en application des notions développées précédemment et traite en première lieu des problèmes liés à l'échantillonnage des images, des outils nécessaires au filtrage numérique des images et à l'analyse spectrale des signaux multidimensionnels en mentionnant un cas particulier, la transformée en cosinus à la base de techniques de compression d'images. Elle donne l'extension aux signaux bidimensionnels des outils utiles pour l'étude des signaux aléatoires, comme l'analyse spectrale.

Enfin, dans un deuxième paragraphe, elle aborde quelques domaines où l'utilisation de l'analyse en fréquence est fondamentale comme la propagation d'ondes, la résolution d'équations aux dérivées partielles, l'imagerie médicale, l'interférométrie et l'analyse des contours dans une image.

1. Échantillonnage et filtrage numérique des signaux 2D

Les problèmes posés par l'échantillonnage des signaux bidimensionnels sont similaires à ceux des signaux monodimensionnels. La théorie de Nyquist-Shannon s'applique de la même manière. Toutefois, une interprétation dans un espace à deux dimensions est nécessaire pour mieux comprendre les phénomènes liés à l'échantillonnage dans le domaine spatial, comme les effets de la géométrie du motif d'échantillonnage.

Mentionnons d'abord les compromis nécessaires entre la rigueur théorique et les spécificités de certaines applications en traitement numérique des images.

Les spécialistes du traitement numérique des images ont l'habitude de représenter une image échantillonnée sous la forme de « pixels », des carrés où l'intensité de l'image est constante. Ce n'est pas l'interprétation compatible avec la théorie de l'échantillonnage. Par ailleurs, l'effet stroboscopique du cinéma et les effets de moiré qu'on peut observer lors de la numérisation de textures de vêtements, par exemple, montrent que l'application rigoureuse des bonnes conditions d'échantillonnage ne sont pas nécessairement une priorité. Pour une interprétation correcte des effets de l'échantillonnage, il faut considérer l'image comme un ensemble d'impulsions de Dirac où chaque impulsion est au centre d'un pixel et a pour amplitude l'intensité de ce pixel. Tout le reste du pixel a une intensité nulle (figure 1). La représentation habituelle sous forme de pixels correspond au filtrage de l'image composée d'impulsions d'amplitude variable par un filtre dont la réponse impulsionnelle est une fonction égale à un à l'intérieur du carré support d'un pixel centré à l'origine et nulle partout ailleurs (équivalent bidimensionnel du bloqueur d'ordre zéro pour les signaux temporels).

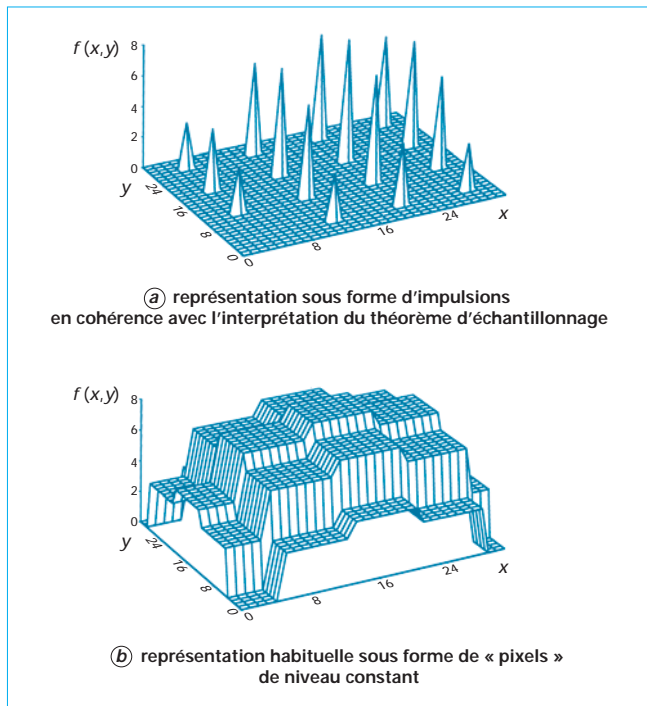


Figure 1 – Représentations spatiales d'une image échantillonnée

1.1 Échantillonnage rectangulaire ou carré

Parmi tous les échantillonnages réguliers possibles, l'échantillonnage carré est le plus courant. Nous étudierons plus spécialement celui-ci et nous verrons succinctement comment on peut étendre les résultats obtenus au cas de l'échantillonnage en quinconce.

1.1.1 « Brosse » d'impulsions de Dirac

Une impulsion de Dirac dans le plan est telle que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x) \delta(y) dx dy = f(0, 0) \quad (1)$$

On peut considérer que l'échantillonnage est obtenu en faisant le produit du signal par une « brosse » $b(x, y)$ d'impulsions de Dirac :

$$\begin{aligned} g(x, y) &= f(x, y) b(x, y) \\ &= f(x, y) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - m\Delta x) \delta(y - n\Delta y) \end{aligned} \quad (2)$$

Cette brosse $b(x, y)$ a pour transformée de Fourier une brosse dans le domaine des fréquences :

$$B(u, v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \delta(u - 2\pi k/\Delta x) \delta(v - 2\pi \ell/\Delta y) \quad (3)$$

1.1.2 Interprétation de l'échantillonnage dans le domaine des fréquences. Repliement spectral dans le cas bidimensionnel

La transformée de Fourier $G(u, v)$ de la fonction échantillonnée $g(x, y)$ est la convolution de la brosse $B(u, v)$ et de $F(u, v)$ transformée de l'image avant échantillonnage. C'est donc la somme des reproductions de $F(u, v)$ déduites de $F(u, v)$ par translation aux points de coordonnées $(2k\pi/\Delta x, 2\ell\pi/\Delta y)$. Il y a périodisation bidimensionnelle de la transformée de Fourier de l'image initiale :

$$G(u, v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} F(u - 2\pi k/\Delta x, v - 2\pi \ell/\Delta y) \quad (4)$$

1.1.3 Reconstitution d'un signal continu à partir du signal échantillonné. Théorème d'échantillonnage

Pour reconstituer le signal « analogique » (par analogique nous entendons le signal fonction des variables spatiales continues x et y), il faut reconstituer $f(x, y)$ à partir de $g(x, y)$ ou bien, ce qui est équivalent, $F(u, v)$ à partir de $G(u, v)$ dans le domaine des fréquences. Une façon simple de procéder est de faire en sorte qu'il y ait un seul terme non nul dans la somme (4) et donc que $F(u, v)$ soit de support fini, le plus souvent dans le domaine des basses fréquences au voisinage de l'origine. Ainsi, il n'y a pas recouvrement des différentes reproductions décalées de $F(u, v)$. Avant d'échantillonner, il faut donc filtrer passe-bas l'image de sorte que :

$$F(u, v) = 0 \text{ pour } |u| \geq \pi/\Delta x, |v| \geq \pi/\Delta y \quad (5)$$

Si cette hypothèse est vérifiée, pour retrouver $F(u, v)$ il faut sélectionner la composante de $G(u, v)$ intérieure au rectangle :

$$-\pi/\Delta x < u < \pi/\Delta x \quad (6)$$

$$-\pi/\Delta y < v < \pi/\Delta y \quad (7)$$

et donc filtrer passe-bas le signal $g(x, y)$.

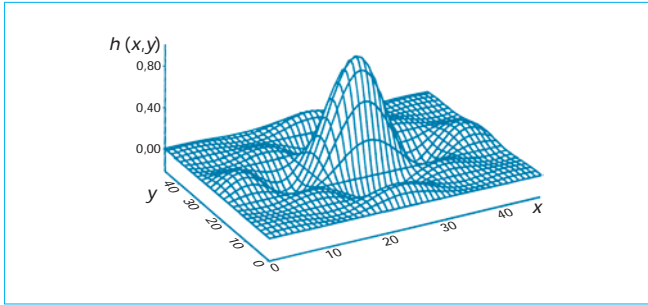


Figure 2 – Réponse impulsionnelle d'un filtre réalisant l'interpolation idéale

Dans le cas de l'échantillonnage à motif carré, nous choisirons $\Delta x = \Delta y = 1$. Dans ce cas, la réponse impulsionnelle $h(x, y)$ est la transformée de Fourier inverse du carré. C'est une intégrale séparable en un produit de deux sinus cardinaux (figure 2) :

$$h(x, y) = \frac{\sin \pi x}{\pi x} \frac{\sin \pi y}{\pi y} \quad (8)$$

Le signal reconstitué sera alors :

$$f(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(m, n) \frac{\sin \pi(x-m)}{\pi(x-m)} \frac{\sin \pi(y-n)}{\pi(y-n)} \quad (9)$$

Notons que cette approche rigoureuse supposant un filtrage passe-bas avant l'échantillonnage n'est pas nécessairement pertinente dans toutes les applications en traitement numérique des images ; en particulier les études qui portent sur les détections de contours et de régions (où l'on cherche à mettre en évidence les discontinuités de l'image) ne sont pas nécessairement compatibles avec les oscillations parasites de ce filtrage passe-bas. Toutefois, il peut être utile d'envisager cette approche de l'échantillonnage même dans des applications où l'image traitée présente des discontinuités (la présence d'oscillations parasites peut être utilisée pour caractériser ces discontinuités) ; si on ne le fait pas, il ne faut pas oublier que les conditions de Shannon de reconstruction de l'image analogique initiale ne sont pas vérifiées.

Exemple : la translation d'une longueur inférieure à un pas d'échantillonnage fera apparaître ces oscillations parasites au voisinage des discontinuités de l'image initiale.

1.1.4 Échantillonnage parallélogramme ou en quinconce (ou hexagonal)

Dans certaines applications, l'échantillonnage rectangulaire n'est pas le plus judicieux. On peut être amené à effectuer un échantillonnage régulier mais en quinconce : les points relevés sont situés sur une grille $(m\vec{a}, n\vec{b})$ où \vec{a} et \vec{b} sont deux vecteurs respectivement inclinés sur l'axe Ox d'un angle θ et φ (figure 3). La brosse d'échantillonnage est alors déformée, le rectangle devenant un parallélogramme. Il n'y aura pas recouvrement spectral si la transformée de Fourier de l'image est nulle en dehors du parallélogramme dont les quatre sommets sont les extrémités des vecteurs $\pm \pi j \vec{a} / |a|^2, \pm \pi j \vec{b} / |b|^2$ (j traduisant une rotation de $\pi/2$ dans le plan).

Il existe plusieurs figures élémentaires permettant de paver le plan sans qu'il y ait de recouvrement, en particulier différents parallélogrammes (figure 4a). La réponse impulsionnelle du filtre passe-bas de reconstruction dépend de la forme du support du filtre d'échantillonnage ; elle restera en général un produit de

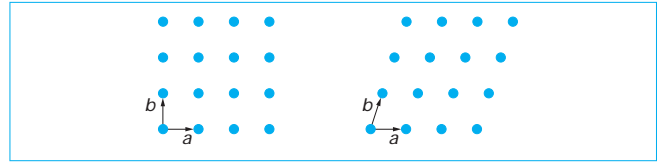


Figure 3 – Échantillonnage rectangulaire et échantillonnage parallélogramme

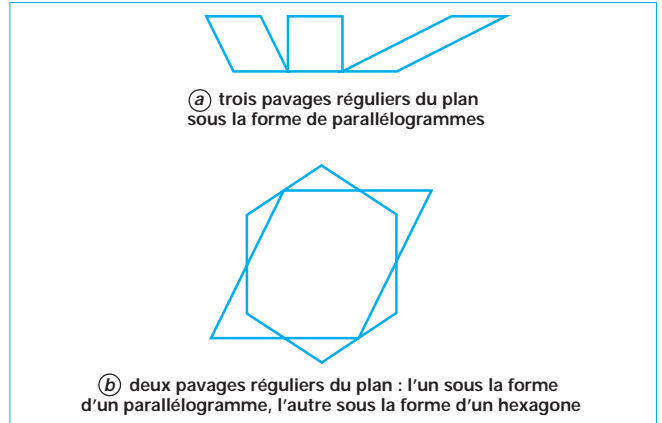


Figure 4 – Pavages réguliers du plan

fonctions du type $\frac{\sin \pi x}{\pi x}$. On trouve la forme correcte du filtre en utilisant le résultat sur l'inclinaison des transformées de Fourier (cf. [AF 1 441] § 1.3).

Une configuration utile de l'échantillonnage est celle où chaque point (ou pixel) est équidistant de ses deux voisins sur la même ligne, des deux points situés sur la ligne supérieure et des deux points situés sur la ligne inférieure. Les six plus proches voisins de chacun des points forment un hexagone régulier. Si l'écart entre deux points d'une même ligne est pris égal à 1, celui entre les lignes est $\sqrt{3}/2$; d'une ligne à l'autre, le décalage horizontal des points est 1/2 (figure 3). Dans ce cas, on peut redécouper le parallélogramme permettant un pavage du plan des fréquences pour le transformer en un hexagone régulier (figure 4b).

Ce choix d'échantillonnage (souvent appelé hexagonal) peut être intéressant lorsque le support de la transformée de Fourier de l'image $F(u, v)$ est un disque. Ce disque peut être recouvert par l'hexagone ou par un carré. Le rapport des surfaces de l'hexagone

et du carré est $\frac{\sqrt{3}}{2}$. En réduisant la surface du support du signal dans le domaine des fréquences, on augmente du même facteur la taille du motif d'échantillonnage dans le domaine spatial et on réduit du même facteur le nombre d'échantillons permettant de stocker une image.

Remarque : la reconstitution idéale suppose la réalisation d'un filtre de support infini. En pratique il faut limiter la taille du support de la réponse impulsionnelle de ce filtre. Souvent, on se contente d'un simple filtrage passe-bas ligne par ligne par un bloqueur d'ordre zéro (dans le cas des signaux de télévision par exemple). On peut affiner la reconstitution en faisant une interpolation linéaire. Le filtre d'interpolation linéaire est la généralisation du filtre monodimensionnel de réponse impulsionnelle triangulaire : c'est une pyramide dont la base dépend de la configuration de l'échantillonnage : carré, hexagone, losange.

1.2 Représentation fréquentielle des signaux discrets bidimensionnels

1.2.1 Transformée en z bidimensionnelle dans le cas d'un échantillonnage carré

On définit deux opérateurs de translation élémentaires de Δx et Δy suivant les directions Ox et Oy du plan. On associe à chacun de ces opérateurs une variable z_x et z_y . La valeur de la transformée en z d'un échantillon d'amplitude $f(m, n)$ situé en un point de coordonnées m et n est alors, en prenant des pas d'échantillonnage Δx et Δy égaux à un dans les deux directions :

$$F(z_x, z_y) = f(m, n) z_x^{-m} z_y^{-n} \quad (10)$$

Dans le cas d'une fonction échantillonnée définie sur tout le plan, la transformée s'obtient par sommation :

$$F(z_x, z_y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(m, n) z_x^{-m} z_y^{-n} \quad (11)$$

Elle est définie dans un domaine où la somme converge, en général un domaine contenant le tore « produit » des deux cercles $z_x = z_y = 1$ de rayon un. Sur ce tore, elle prend la forme d'une transformée de Fourier.

Si la fonction $f(x, y)$ peut s'écrire sous la forme d'un produit :

$$f(x, y) = h(x) g(y) \quad (12)$$

la transformée $F(z_x, z_y)$ est aussi séparable :

$$F(z_x, z_y) = H(z_x) G(z_y) \quad (13)$$

avec $H(z_x)$ et $G(z_y)$ transformées de $h(x)$ et $g(y)$.

C'est le produit de deux transformées en z monodimensionnelles.

Notons qu'il peut être pratique d'utiliser des fonctions séparables pour lesquelles le calcul des propriétés est facilité et dont l'implantation peut se faire beaucoup plus simplement, dans le cas du filtrage par exemple.

■ Lien avec la transformée de Fourier bidimensionnelle

Si l'on pose :

$$\begin{aligned} z_x &= \exp(ju) \\ z_y &= \exp(jv) \end{aligned} \quad (14)$$

la transformée en z s'écrit :

$$F(\exp ju, \exp jv) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(m, n) \exp -j(um + vn) \quad (15)$$

C'est la transformée de Fourier du signal échantillonné (de la « brosse » d'impulsions de Dirac dont les amplitudes sont $f(x, y)$). Elle est donc périodique et obtenue par addition des répétitions de la transformée de Fourier du signal analogique. La périodicité est de 2π pour chacune des variables car on a choisi un pas d'échantillonnage égal à 1 dans les deux directions.

La transformée inverse est la généralisation de la transformée de Fourier inverse :

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \oint_{C_x} \oint_{C_y} F(z_x, z_y) z_y^y \frac{dz_y}{z_y} \Big|_{z_x^x} \frac{dz_x}{z_x} \quad (16)$$

Les intégrations se faisant sur un contour fermé autour de l'origine intérieur au domaine de définition de la transformée. Son utilisation pratique se ramène, la plupart du temps, à la transformée de Fourier inverse.

1.2.2 Propriétés essentielles

Les propriétés des transformées monodimensionnelles de la transformée en z sont conservées.

■ Transformée d'une convolution

La transformée d'une convolution est le produit des transformées des deux fonctions convoluées.

Soit la convolution bidimensionnelle :

$$f(x, y) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{t=-\infty}^{\infty} g(s, t) h(x-s, y-t) \quad (17)$$

Sa transformée en z est :

$$F(z_x, z_y) = G(z_x, z_y) H(z_x, z_y) \quad (18)$$

avec $G(z_x, z_y)$ et $H(z_x, z_y)$ transformées en z de $g(x, y)$ et $h(x, y)$.

■ Transformée d'un produit

$$f(x, y) = g(x, y) h(x, y) \quad (19)$$

a pour transformée :

$$F(\exp ju, \exp jv) = \quad (20)$$

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\exp jr, \exp jw) G(\exp j(u-r), \exp j(v-w)) dr dw$$

où on restreint le domaine de définition à $z_x = \exp ju$, $z_y = \exp jv$. $G(\exp ju, \exp jv)$ et $H(\exp ju, \exp jv)$ sont des fonctions périodiques de u et v . $F(\exp ju, \exp jv)$ est la généralisation bidimensionnelle d'une convolution circulaire.

■ Théorème de Parseval

Il s'écrit :

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} |f(x, y)|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(\exp j(u), \exp j(v))|^2 du dv \quad (21)$$

1.3 Transformée de Fourier discrète ou DFT

1.3.1 Périodisation du signal spatial

Si le signal $f(x, y)$ est donné dans un domaine fini carré (de taille $T \times T$), et si ce signal est répété indéfiniment dans les deux directions par décalage de longueur T , on peut calculer la représentation en série de Fourier de ce signal périodique bidimensionnel. Cette transformée est une double série d'harmoniques définies pour u et v multiples de $2\pi/T$ (ce qui fait $T \times T$ échantillons dans le domaine des fréquences). L'amplitude de chacun de ces harmoniques est égale à la valeur de la transformée de Fourier du signal tronqué sur le support carré :

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{T-1} \sum_{y=0}^{T-1} f(x, y) \exp -2\pi j \frac{ux + vy}{T} \quad (22)$$

La transformée inverse s'écrit :

$$f(x, y) = \frac{1}{T^2} \sum_{u=0}^{T-1} \sum_{v=0}^{T-1} F(u, v) \exp 2\pi j \frac{ux + vy}{T} \quad (23)$$

Cette transformée de Fourier discrète est la transformée d'une fonction périodique en x et en y dans le domaine spatial, conséquence de son échantillonnage dans le domaine des

fréquences. Comme $f(x, y)$ est une fonction échantillonnée dans le domaine spatial, elle est périodique dans le domaine des fréquences. Les deux fonctions $f(x, y)$ et $F(u, v)$ sont toutes les deux des fonctions périodiques et échantillonnées de même taille. Les propriétés de la transformée de Fourier bidimensionnelle qui ne sont pas compatibles avec l'échantillonnage (rotation, dilatation, inclinaison par exemple) ne sont pas conservées.

La transformée de Fourier discrète s'applique aussi dans le cas d'un échantillonnage en quinconce et d'un support parallélogramme, mais cela nécessite des précautions lors de l'interprétation du résultat.

1.3.2 Transformée de Fourier rapide bidimensionnelle

L'algorithme de calcul rapide de la transformée de Fourier (FFT) peut s'appliquer de la manière suivante. La transformée discrète correspond à une double sommation que l'on peut effectuer en deux temps ; d'abord sur la variable x puis sur la variable y :

$$F(u, v) = \sum_{y=0}^{T-1} \left[\sum_{x=0}^{T-1} f(x, y) \exp - 2\pi j \frac{ux}{T} \right] \exp - 2\pi j \frac{vy}{T} \quad (24)$$

Dans la sommation sur x , y est fixé : on peut y reconnaître une transformée de Fourier discrète monodimensionnelle sur chacune des lignes du tableau des $T \times T$ valeurs de $f(x, y)$. Cette transformée monodimensionnelle peut se calculer grâce à l'algorithme de transformée de Fourier rapide monodimensionnelle et transforme la ligne numéro y en une ligne de T éléments de la forme $G(u, y)$:

pour $y = 0, \dots, T-1$
 pour $u = 0, \dots, T-1$:

$$G(u, y) = \sum_{x=0}^{T-1} f(x, y) \exp - 2\pi j \frac{ux}{T} \quad (25)$$

On peut maintenant calculer la transformée de Fourier de chacune des colonnes de ce tableau en appliquant une nouvelle fois un algorithme de transformée de Fourier rapide monodimensionnelle :

pour $u = 0, \dots, T-1$
 pour $v = 0, \dots, T-1$:

$$F(u, v) = \sum_{y=0}^{T-1} G(u, y) \exp - 2\pi j \frac{vy}{T} \quad (26)$$

On applique ainsi $2T$ fois l'algorithme de transformée de Fourier rapide. Cet algorithme nécessite de l'ordre de $T \log_2 T$ calculs élémentaires. Le calcul de la transformée de Fourier bidimensionnelle se fait en effectuant de l'ordre de $T^2 \log_2 T^2$ calculs élémentaires. C'est la même quantité de calculs que dans le cas où les T^2 valeurs seraient rangées en une colonne pour permettre le calcul d'une transformée monodimensionnelle (mais les calculs ne sont pas identiques). Il est possible de réduire de T à $0,75 T$ le nombre de calculs élémentaires en combinant les calculs en colonne et en ligne.

1.3.3 Transformée en cosinus

Cette transformée est en fait une variante de la transformée de Fourier discrète qui transforme un signal réel en un signal réel (la notion de phase n'y apparaît pas). Elle est couramment utilisée en codage d'images à débit réduit (formats JPEG, MPEG2) : en général, pour les types d'images couramment transmises, la décroissance de l'énergie en fonction de la fréquence est rapide dans le cas de cette transformée. Il est donc possible de coder cor-

rectement une image en effectuant la transformation en cosinus de cette image, puis en codant judicieusement les hautes fréquences.

Pour les valeurs de u et de v variant de 0 à $T-1$, la transformée est donnée par :

$$F(u, v) = \frac{2}{T} \frac{1}{\sqrt{2}} 2^{\lambda(u)+\lambda(v)} \sum_{x=0}^{T-1} \sum_{y=0}^{T-1} f(x, y) \cos \pi \frac{(2x+1)u}{T} \sin \pi \frac{(2y+1)v}{T} \quad (27)$$

avec $\lambda(u) = 0$ pour $u \neq 0$ et $\lambda(0) = 1$.

La transformée inverse, utilisée pour la reconstruction de l'image, est donnée par :

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{T-1} \sum_{v=0}^{T-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) 2^{\lambda(u)+\lambda(v)} F(u, v) \cos \pi \frac{(2x+1)u}{T} \sin \pi \frac{(2y+1)v}{T} \quad (28)$$

Exemple : le nombre de bits de codage de l'amplitude décroît linéairement de 6 à 0 en fonction de $u + v$, les amplitudes aux fréquences situées au-delà d'une certaine valeur sont considérées comme nulles.

1.3.4 Représentation visuelle de la transformée de Fourier discrète

Dans un calcul de transformée de Fourier, les fréquences sont en général comptées de 0 à 2π si bien que la fréquence (0, 0) se trouve représentée graphiquement « en bas et à gauche » de l'image, et, du fait de la périodicité conséquente de l'échantillonnage, au quatre coins de la figure (figure 5). On préfère souvent une présentation où la fréquence (0, 0) se retrouve au centre de la figure. Cette transformation correspond à l'échange des parties gauche et droite de l'image suivi de l'échange des parties haute et basse (on compte les fréquences dont une composante est égale à la moitié de la fréquence d'échantillonnage ($\pm \pi$) comme une fréquence négative par analogie avec la représentation des nombres négatifs « en complément à deux ».

1.4 Filtrage des signaux bidimensionnels

Une opération couramment utilisée en traitement des images et des signaux multidimensionnels est l'application d'un filtre linéaire invariant spatialement.

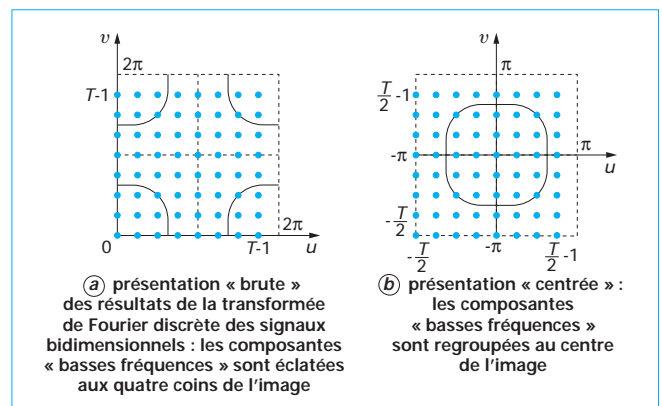


Figure 5 – Représentation visuelle d'une transformée de Fourier discrète

On peut l'utiliser, par exemple, pour atténuer l'effet d'un bruit, pour lisser ou pour rééchantillonner une image. Dans ces deux cas, on réalise un filtre qui élimine les hautes fréquences. Dans d'autres applications, on peut être amené à rehausser les contours. Dans ce cas, on appliquera un filtre amplifiant les hautes fréquences. L'application de ces filtres correspond au calcul d'une convolution. Ce calcul peut se faire de différentes manières : filtres à réponse impulsionnelle finie, filtre récursif ; on peut aussi effectuer un produit dans le domaine des fréquences, ce qui peut être plus économique en nombre d'opérations. La convolution bidimensionnelle :

$$f(x, y) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} g(s, t)h(x-s, y-t) \quad (29)$$

a pour transformée en z un produit :

$$F(z_x, z_y) = G(z_x, z_y) H(z_x, z_y) \quad (30)$$

1.4.1 Filtres à réponse impulsionnelle finie

En traitement d'image, ce sont les filtres les plus couramment utilisés. On programme ainsi l'opération :

$$f(x, y) = \sum_{s=a}^b \sum_{t=c}^d g(s, t)h(x-s, y-t) \quad (31)$$

avec a et b abscisses, c et d ordonnées minimales et maximales de l'opérateur de convolution $g(x, y)$ qu'on applique à l'image à traiter $h(x, y)$.

En traitement d'images, il est souvent préférable d'éviter les déphasages pour ne pas déformer l'image ; leur réponse en fréquence est alors réelle et positive et leur réponse impulsionnelle sera symétrique. L'utilisation des filtres récursifs est plus délicate, du fait de problèmes de causalité et de stabilité, et beaucoup plus rare.

1.4.2 Implantation des filtres à réponse impulsionnelle finie

Dans le cas d'une convolution de deux fonctions à support fini, le support du résultat a un support fini dépendant des supports des deux fonctions.

Exemple : si ces deux fonctions ont des supports rectangulaires dont les dimensions sont respectivement $A \times B$ et $C \times D$, le support de la convolution aura pour dimensions $(A + C - 1) \times (B + D - 1)$ (figure 6).

On peut programmer le filtre dans le domaine spatial sous la forme d'une convolution (31), ce qui est la solution la plus efficace lorsque les dimensions du filtre sont petites. Mais si la taille du filtre augmente, il peut être plus intéressant de prendre la transformée de Fourier discrète du signal à filtrer et de la réponse impulsionnelle du filtre, d'effectuer le produit dans le domaine des fréquences et de faire une transformée de Fourier inverse.

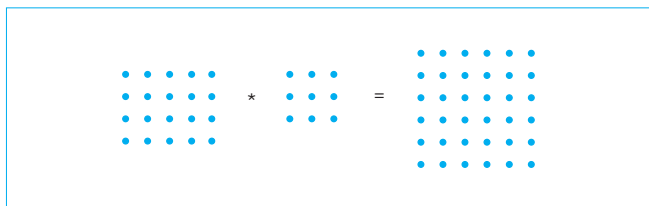


Figure 6 - Effet d'étalement spatial du support des images du fait de l'application d'une opération de convolution

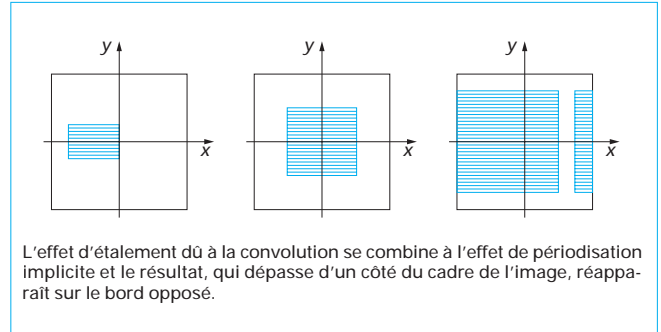


Figure 7 - Conséquence de l'effet d'étalement spatial combiné à la périodisation du fait de l'application d'une opération de convolution fondée sur l'utilisation de la transformée de Fourier discrète

Si l'on choisit de réaliser cette suite d'opérations, il faut prendre en compte le fait que le calcul de la transformée de Fourier discrète comporte une périodisation implicite du signal dans le domaine spatial : l'image étant échantillonnée dans le domaine des fréquences, elle est nécessairement périodique dans le domaine spatial. Il faut donc compléter les signaux à convoluer par des zéros avant d'en prendre la transformée de Fourier de telle sorte que le résultat de la convolution ne soit pas altéré par les recouvrements dus à la périodisation implicite.

Exemple : si les deux signaux à convoluer sont de dimension $T \times T$, le support de la convolution sera de dimension $(2T - 1) \times (2T - 1)$. Avant de prendre la transformée de Fourier des deux signaux, il faudra compléter par des zéros pour former des carrés de taille supérieure à $(2T - 1) \times (2T - 1)$, par exemple $2T \times 2T$, et prendre les transformées de Fourier sur ces carrés de surface quatre fois plus grande (figure 7).

■ Synthèse des filtres à réponse impulsionnelle finie

Pour réaliser simplement un filtre de réponse en fréquence donnée, on se fixe un gabarit que doit respecter le filtre dans le domaine des fréquences et on en calcule la réponse impulsionnelle par transformée de Fourier inverse ; on tronque ensuite la réponse impulsionnelle dans le domaine spatial et on effectue à nouveau une transformée de Fourier pour vérifier si le résultat est compatible avec le gabarit initial. On peut améliorer les résultats de cette technique élémentaire en utilisant des méthodes plus élaborées (cf., par exemple, l'ouvrage de Dudgeon et Mersereau, cité en [Doc. AF 1 442]).

1.5 Filtres miroir en quadrature et transformée en ondelettes

Le champ des applications actuelles de l'analyse par ondelettes est varié et comporte, par exemple, un bon nombre de problèmes où il est utile d'analyser le signal en le découpant en signaux occupant des bandes de fréquence complémentaires, sans les contraintes de l'analyse de Fourier classique. Nous nous intéressons ici au prétraitement du signal en vue de la compression d'images où il s'agit de réduire la taille de la mémoire nécessaire au stockage de l'image sans que cette compression en détériore excessivement la qualité. Les étapes ultérieures, l'application récursive de cette méthode à la composante basse fréquence et la compression proprement dite sortent du cadre de cette présentation. Elles font appel aux techniques de classification. Dans les versions les plus simples, les filtres bidimensionnels appliqués aux images sont des filtres séparables, si bien qu'il suffit d'appliquer une analyse monodimensionnelle, ligne par ligne puis colonne par colonne, pour effectuer le traitement bidimensionnel (cf. § 3

« Wavelet transform and image coding » par M. Antonini *et al.*, « Wavelets in image communication », M. Barlaud, éd. cité en [Doc. AF 1 442]).

1.5.1 Filtres miroirs en quadrature

Les filtres miroirs en quadrature (QMF) sont utilisés pour reconstruire des signaux à partir de composantes basses fréquences et hautes fréquences après les avoir sous-échantillonnées, bien que cet échantillonnage ne respecte pas les conditions du théorème de Shannon : le sous-échantillonnage induit un repliement spectral. Toutefois la forme complémentaire des filtres passe-bas et passe-haut garantit une reconstruction exacte : ces filtres respectent les conditions d'application du deuxième théorème de Nyquist sur l'échantillonnage des signaux en transmission numérique : on peut retrouver directement les échantillons d'un signal malgré une déformation par un filtre linéaire si la réponse en fréquence $G(\omega)$ de ce filtre vérifie :

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} G(\omega + 2\pi m) = 1 \tag{32}$$

On peut décomposer un signal en lui appliquant un filtre passe-bas d'analyse $B_A(\omega)$ de réponse impulsionnelle que nous supposons symétrique $b_A(t) = b_A(-t)$ et un filtre passe-haut $H_A(\omega)$ de réponse impulsionnelle :

$$h(t) = (-1)^t b(t) \tag{33}$$

soit, dans le domaine des fréquences :

$$H_A(\omega) = B_A(\omega + \pi) \tag{34}$$

On analyse le signal $f(t)$ en lui appliquant $B_A(\omega)$ et en prélevant un échantillon sur deux soit $f_B(2t)$; la première étape de la synthèse de la composante « basses fréquences » se fait en intercalant des valeurs à zéro entre les échantillons du signal soit :

$$\begin{aligned} g_B(2t) &= f_B(2t) \\ g_B(2t+1) &= 0 \end{aligned} \tag{35}$$

Le fait d'intercaler des zéros implique un repliement spectral.

L'analyse de la composante « hautes fréquences » se fait en appliquant à $f(t)$ le filtre $H_A(\omega)$ et en prélevant un échantillon sur deux soit $f_H(2t)$. La première étape de la synthèse de la composante « hautes fréquences » se fait aussi en intercalant un échantillon à zéro entre ces échantillons, soit $g_H(t)$, ce qui implique ici aussi un repliement spectral. On filtre les deux composantes $g_B(t)$ et $g_H(t)$ par des filtres de reconstruction $B'_R(\omega)$ et $H'_R(\omega)$ avant de les additionner.

Les fonctions de reconstruction $B'_R(\omega)$ et $H'_R(\omega)$ sont choisies pour que la reconstruction donne exactement le signal initial $f(t)$. Les conditions de reconstruction exacte doivent être telles que la somme des deux réponses en fréquences soit constante. L'effet du filtre d'analyse, du sous-échantillonnage et de l'intercalage (périodisation) de zéros donne une réponse en fréquence :

$$B'_A(\omega) = B_A(\omega) + B_A(\omega + \pi) \tag{36}$$

dans les basses fréquences,

et :

$$H'_A(\omega) = H_A(\omega) + H_A(\omega + \pi) \tag{37}$$

dans les hautes fréquences.

Les filtres de reconstruction $B'_R(\omega)$ et $H'_R(\omega)$ vérifient :

$$B'_A(\omega)B'_R(\omega) + H'_A(\omega)H'_R(\omega) = 1 \tag{38}$$

1.5.2 Mise en œuvre sous forme d'ondelettes en analyse de signaux bidimensionnels

On se donne une fonction modèle symétrique $b_A(t)$ de transformée de Fourier réelle et paire $B_A(\omega)$. La symétrie a pour objet de ne pas déformer les signaux ; pour le reste, le choix de cette fonction est arbitraire. Il faut toutefois que sa transformée de Fourier décroisse assez vite avec la fréquence. Dans le cas du codage d'images, il s'agit un filtre passe-bas de réponse impulsionnelle courte (moins de dix échantillons). À partir de cette fonction, on construit le filtre passe-haut associé $h_A(t)$. Ces deux filtres serviront à déduire de l'image initiale deux images, l'une filtrée passe-bas et l'autre filtrée passe-haut qui seront sous-échantillonnées. On calcule, pour effectuer la reconstruction, deux filtres $b_R(t)$ et $h_R(t)$ dont les transformées de Fourier sont respectivement $B_R(\omega)$ et $H_R(\omega)$ et vérifient l'équation (38). Un choix possible est :

$$H_A(\omega) = \exp -j\omega B_R(\omega + \pi) \tag{39}$$

$$H_R(\omega) = \exp j\omega B_A(\omega + \pi) \tag{40}$$

soit, dans le domaine temporel, un décalage d'un échantillon et une modulation à la moitié de la fréquence d'échantillonnage :

$$h_A(t) = (-1)^t b_R(t - 1) \tag{41}$$

$$h_R(t) = (-1)^t b_A(t + 1) \tag{42}$$

Les filtres passe-haut sont reliés aux filtres passe-bas par un déphasage linéaire et une translation de π dans le domaine des fréquences (le filtre de synthèse passe-haut se déduit du filtre d'analyse passe-bas, le filtre d'analyse passe-haut se déduit du filtre de synthèse passe-bas). Après suréchantillonnage (intercalage de zéros entre les échantillons), les filtres de reconstruction obtenus vérifient les équations (36) (37). Un exemple de filtres est présenté sur la figure 8. Un des avantages de l'analyse fondée sur cette forme d'ondelettes est de garantir la symétrie des réponses impulsionnelles et des réponses en fréquences (réelles) des filtres. Ainsi, les composantes fréquentielles ne sont pas déphasées, et les images ne sont pas déformées.

1.5.3 Enchaînement des opérations d'analyse

■ Le signal à analyser $f_0(x, y)$ est filtré passe-bas ligne par ligne par $b_A(x)$ puis rééchantillonné en y prélevant un échantillon sur deux :

$$s_b(x, y) = \sum_k b_A(k) f_0(2x - k, y) \tag{43}$$

On effectue la même opération sur les colonnes (appliquée à l'image rééchantillonnée qui vient d'être traitée ligne par ligne), ce qui produit le signal comprimé :

$$s_{bb}(x, y) = \sum_{\ell} b_A(\ell) s_b(x, 2y - \ell) \tag{44}$$

■ On effectue les opérations similaires avec le filtre $b_A(x)$ et $h_A(y)$, ce qui produit un signal $s_{bh}(x, y)$ filtré passe-bas sur les lignes et passe-haut sur les colonnes.

■ On effectue les opérations similaires avec le filtre $h_A(x)$ et $b_A(y)$, ce qui produit un signal $s_{hb}(x, y)$ filtré passe-haut sur les lignes et passe-bas sur les colonnes.

■ On effectue les opérations similaires avec le filtre $h_A(x)$ et $h_A(y)$, ce qui produit un signal $s_{hh}(x, y)$ filtré passe-haut sur les lignes et sur les colonnes (figure 9).

On applique une méthode de compression à ces trois dernières composantes de l'image. Les opérations de filtrage qui viennent d'être décrites sont appliquées à la composante basses fréquences $f_1(x, y) = s_{bb}(x, y)$.

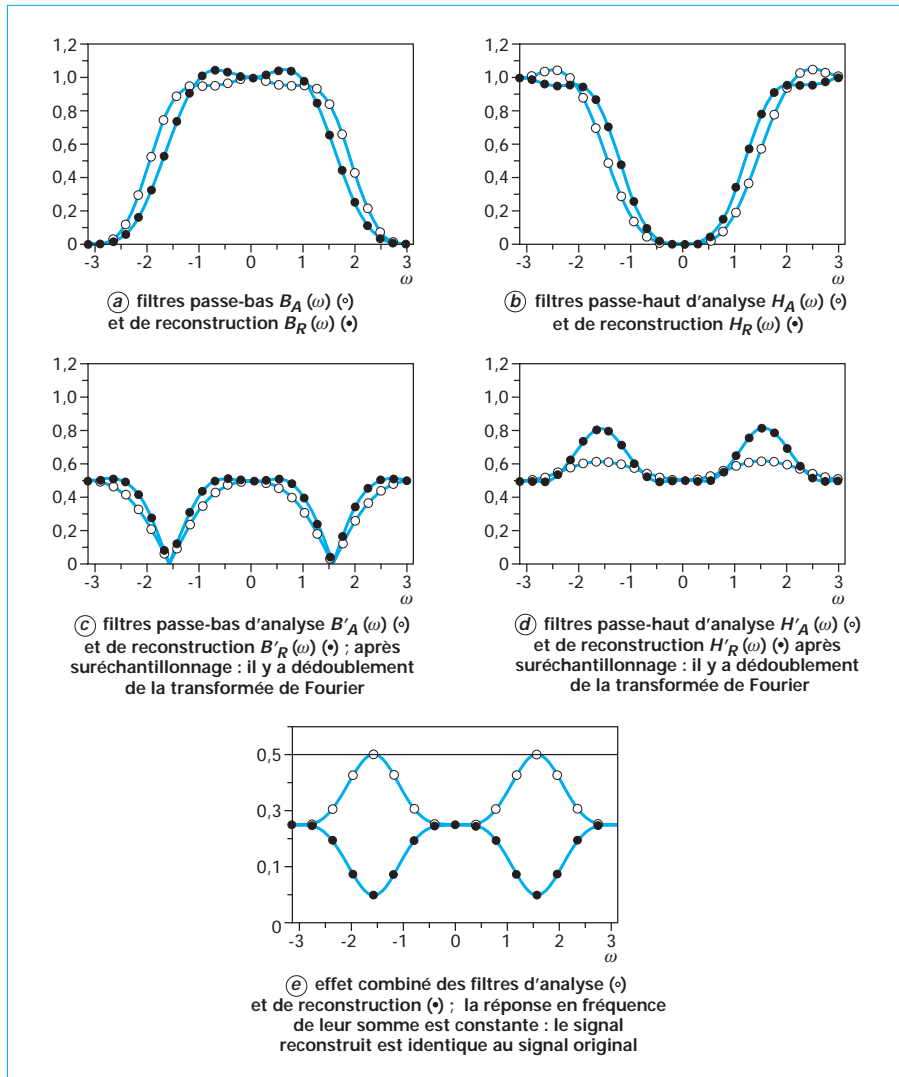


Figure 8 – Ondelettes : représentation en module dans le domaine des fréquences des effets des filtres d'analyse et de reconstruction et de l'échantillonnage

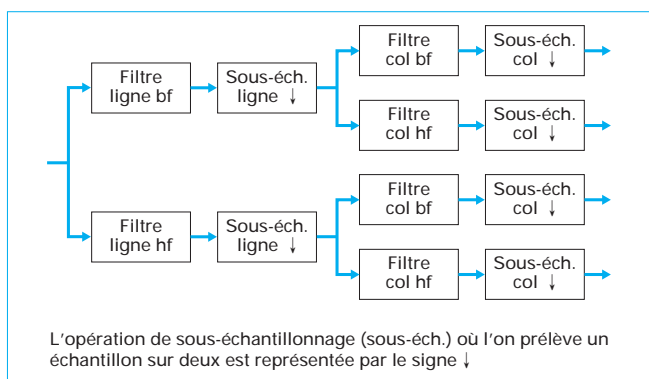


Figure 9 – Enchaînement des opérations d'analyse monodimensionnelles ligne par ligne et colonne par colonne (col) pour réaliser les traitements bidimensionnels

1.5.4 Enchaînement des opérations de reconstruction

On dispose des quatre composantes $s_{bb}(x, y)$, $s_{bh}(x, y)$, $s_{hb}(x, y)$ et $s_{hh}(x, y)$ dont on double le nombre de lignes et le nombre de colonnes en intercalant des valeurs à zéros, ce qui donne les quatre images $s'_{bb}(x, y)$, $s'_{bh}(x, y)$, $s'_{hb}(x, y)$ et $s'_{hh}(x, y)$. On applique sur ces images les filtres de reconstruction dont les réponses impulsionnelles sont $b'_R(x)$ et $h'_R(x)$, transformées de Fourier inverses de $B'_R(\omega)$ et $H'_R(\omega)$ soit $b'_R(x)$ et $b'_R(y)$ à $s'_{bb}(x, y)$, $b'_R(x)$ et $h'_R(y)$ à $s'_{bh}(x, y)$, $h'_R(x)$ et $b'_R(y)$ à $s'_{hb}(x, y)$, $h'_R(x)$ et $h'_R(y)$ à $s'_{hh}(x, y)$, et on ajoute ces quatre images, ce qui reconstitue l'image initiale (figure 10).

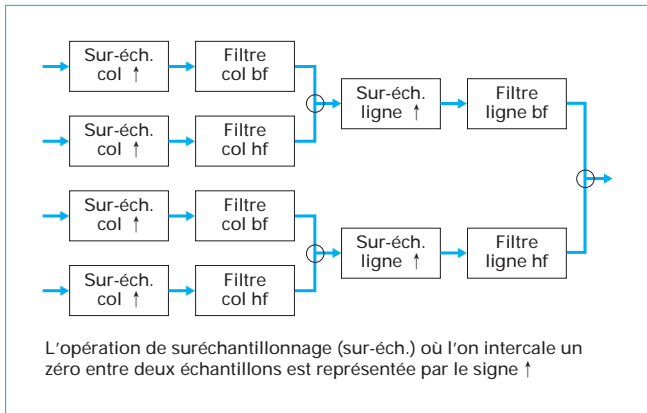


Figure 10 – Enchaînement des opérations de synthèse monodimensionnelles colonne par colonne (col) et ligne par ligne pour reconstituer les signaux bidimensionnels

1.6 Signaux aléatoires bidimensionnels. Estimation spectrale des signaux bidimensionnels

L'analyse des signaux aléatoires bidimensionnels est une extension directe de l'analyse des signaux monodimensionnels.

1.6.1 Fonction d'autocorrélation et densité spectrale

En ce qui concerne l'analyse des statistiques du deuxième ordre, on a ainsi la fonction d'autocorrélation du signal $f(x, y)$ que nous supposons réel, stationnaire et de moyenne nulle :

$$r(m, n) = E[f(x, y) f(x + m, y + n)] \quad (45)$$

qui est une fonction symétrique par rapport à l'origine :

$$r(m, n) = r(-m, -n). \quad (46)$$

et est associée à un opérateur défini positif.

La transformée de Fourier de cette fonction d'autocorrélation est la densité spectrale $R(\exp ju, \exp jv)$ qui est une fonction réelle positive ou nulle. Cette densité spectrale est la moyenne du carré du module de la transformée de Fourier $F(\exp ju, \exp jv)$ du signal $f(x, y)$. Si l'on dispose d'estimations $F'(\exp ju, \exp jv)$ de cette transformée de Fourier, on obtiendra la densité spectrale en calculant la moyenne :

$$R(\exp ju, \exp jv) = E[|F'(\exp ju, \exp jv)|^2] \quad (47)$$

1.6.2 Filtrage linéaire des signaux aléatoires bidimensionnels

De même que dans le cas des signaux monodimensionnels, on peut calculer $R_g(\exp ju, \exp jv)$ densité spectrale de la sortie $g(x, y)$ d'un filtré de réponse impulsionnelle $h(x, y)$ soumis à une entrée aléatoire $f(x, y)$ en fonction du carré du module de la réponse en fréquence du filtre $H(\exp ju, \exp jv)$ et de la densité spectrale du signal d'entrée $R_f(\exp ju, \exp jv)$:

$$R_g(\exp ju, \exp jv) = R_f(\exp ju, \exp jv) |H(\exp ju, \exp jv)|^2 \quad (48)$$

1.6.3 Estimation spectrale bidimensionnelle

Dans les problèmes de détection d'ondes se propageant dans une direction donnée et dans d'autres applications, la recherche de la solution passe par l'estimation de l'amplitude et de la phase

d'une sinusoïde ; c'est-à-dire de la valeur de la transformée de Fourier en un point de l'espace des fréquences. Si l'on s'intéresse plus particulièrement à l'aspect énergétique, plutôt qu'à la forme des signaux, on est amené à étudier le carré du module de cette transformée de Fourier, c'est-à-dire la densité spectrale de puissance bidimensionnelle.

Par exemple, on cherche à détecter la présence d'une sinusoïde bidimensionnelle se détachant d'un bruit de fond en estimant son amplitude sans se préoccuper de sa phase.

Les techniques non paramétriques utilisées dans le cas monodimensionnel s'appliquent aussi dans le cas présent. On peut étudier la répartition énergétique en fonction de la fréquence spatiale en calculant le périodogramme bidimensionnel par transformée de Fourier discrète des images. Les difficultés liées à cette méthode que nous avons vues dans le cas des signaux monodimensionnels se retrouvent ici aussi :

- l'augmentation du nombre d'échantillons ne permet pas de diminuer la variance du périodogramme ;

- l'analyse se fait nécessairement sur un nombre fini d'échantillons. La transformée de Fourier du signal analysé est nécessairement le résultat de la convolution de la transformée de Fourier du signal de durée infinie par la transformée de Fourier de la fenêtre d'analyse : une composante sinusoïdale est donc « dispersée » sur les fréquences voisines.

Pour atténuer les distorsions dues à la limitation des signaux à un support de taille finie, on utilise les mêmes techniques que dans le cas monodimensionnel :

- addition de périodogrammes calculés à partir de différentes images engendrées par un même processus. Cette addition permet de diminuer la variance de l'estimateur ;

- lissage d'un périodogramme par calcul d'une moyenne de l'énergie dans une petite région du domaine des fréquences spatiales, ou bien, ce qui est équivalent, pondération dans le domaine spatial par une fenêtre.

Si la fonction d'autocorrélation du signal tend rapidement vers 0 lorsqu'on s'éloigne de l'origine, cela indique que les variations de la densité spectrale en fonction de la fréquence spatiale sont relativement lentes. Dans ce cas, il peut être légitime de lisser le périodogramme. Cette technique peut aboutir à des résultats médiocres lorsque les variations spectrales sont rapides : c'est le cas lorsque cette densité spectrale présente des pics infinis (Dirac) correspondant à des composantes sinusoïdales isolées dans un bruit de fond coloré.

Un exemple de fenêtre d'analyse est le suivant :

$$f(x, y) = \cos\left(\frac{\pi x}{2T}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2T}\right) \quad (49)$$

définie pour $-T \leq x, y < T$.

Les méthodes « haute résolution » et les méthodes paramétriques d'estimation et de modélisation des spectres monodimensionnels s'étendent au cas bidimensionnel, mais cela nécessite parfois des modifications significatives.

2. Quelques problèmes de traitement de signaux multidimensionnels

Voici quelques exemples de problèmes où la transformée de Fourier joue un rôle important, aussi bien du point de vue pratique que théorique, dans la mesure où la puissance de calcul permet de traiter des signaux dans des espaces à trois dimensions. Nous verrons d'abord les possibilités offertes dans le domaine de la propagation d'ondes, puis la reconstruction d'images en tomographie et en résonance magnétique nucléaire, ensuite les applications en interférométrie et enfin le prétraitement en détection de contour en analyse d'images.

2.1 Problèmes liés à la propagation d'ondes

De nombreux développements portent sur la modélisation et l'analyse de signaux se propageant dans l'espace en fonction du temps. (Notons que J. Fourier a développé sa décomposition d'une fonction sous la forme d'une somme de fonctions sinusoïdales pour traiter des problèmes de propagation correspondant à ce type d'équation différentielle.) Par exemple, la propagation de signaux acoustiques ou électromagnétiques dans un milieu homogène se traduit par des équations différentielles à coefficients constants et justifie une analyse dans le domaine des fréquences.

L'équation de propagation dans un milieu homogène :

$$\frac{\partial^2 f(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(x, y, z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f(x, y, z, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (50)$$

appliquée à une vibration fonction sinusoïdale du temps :

$$f(x, y, z, t) = a(x, y, z) \exp j\varphi(x, y, z) \exp j\omega t \quad (51)$$

devient l'équation de Helmholtz :

$$\frac{\partial^2 f(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(x, y, z, t)}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} f(x, y, z, t) = 0 \quad (52)$$

Cette équation de propagation traduit un effet linéaire et spatialement invariant ; il est efficace d'y appliquer l'analyse de Fourier et les méthodes de filtrage linéaire.

2.1.1 Propagation de signaux en géophysique

Une onde acoustique est engendrée (vibration d'un émetteur, explosion d'une charge) et mesurée par des capteurs après avoir été réverbérée par des couches du sous-sol présentant de brusques variations de caractéristiques (écho). On cherche à retrouver la position de ces zones où l'écho a été engendré à partir des signaux mesurés par les différents capteurs. Ces capteurs forment, par exemple, un réseau régulier linéaire ou planaire. En analyse de signaux sonar ou radar, on est amené à étudier des problèmes du même type.

Un signal (l'ordre qui se propage) est alors caractérisé par sa valeur en fonction de ses coordonnées \vec{x} (un vecteur dans un espace à trois dimensions) et du temps t . On peut calculer sa transformée de Fourier dans un espace à quatre dimensions :

$$F(\vec{u}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x}, t) \exp -j\omega t - (\vec{u} \cdot \vec{x}) d\vec{x} dt \quad (53)$$

La transformée inverse est :

$$f(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\vec{u}, \omega) \exp j(\omega t - \vec{u} \cdot \vec{x}) d\vec{u} d\omega \quad (54)$$

Un signal est ainsi représenté comme une superposition d'ondes planes d'amplitude $F(\vec{u}, \omega)$ de la forme :

$$s(\vec{x}, t) = \exp j\omega \left(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{x}}{\omega} \right) \quad (55)$$

de pulsation ω et dont la direction et la vitesse de propagation sont respectivement la direction du vecteur \vec{u} et $\omega/|\vec{u}|$. Dans l'espace

des fréquences (\vec{u}, ω) , les ondes planes se propageant à la même vitesse c sont situées sur un cône :

$$\frac{\omega}{|\vec{u}|} = c \text{ (constante)} \quad (56)$$

Dans cet espace, des signaux se propageant dans la même direction appartiennent à un hyperplan passant par l'origine et contenant l'axe des fréquences ω .

Une analyse en fréquence ou un filtrage approprié permettent ainsi de sélectionner différentes composantes du signal en fonction de leurs caractéristiques qui peuvent être mises en évidence dans le domaine spectral. Le paragraphe suivant présente une autre forme d'analyse sur des signaux de ce type.

2.1.2 Filtrage d'ondes sismiques

Reprenons par exemple l'équation (50) dans un espace à deux dimensions (x dans le plan horizontal et y sur l'axe vertical). On étudie la propagation d'une onde acoustique $f(x, y, t)$ régie par l'équation hyperbolique :

$$\frac{\partial^2 f(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y, t)}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f(x, y, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (57)$$

La valeur de cette fonction est mesurée au niveau du sol : $f(x, 0, t)$ et donne une condition aux limites caractérisant la solution de l'équation différentielle. On cherche à déduire de ces mesures la valeur de l'onde en profondeur. Ce calcul revient à simuler la propagation « rétrograde » de l'onde par extrapolation.

On peut écrire $f(x, y, t)$ à partir de la transformée de Fourier bidimensionnelle (relativement aux variables x et t) de l'onde à la profondeur y :

$$F(u, y, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, t) \exp -j(ux + \omega t) dx dt \quad (58)$$

en utilisant la transformée inverse :

$$f(x, y, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, y, \omega) \exp j(ux + \omega t) du d\omega \quad (59)$$

et faire apparaître $F(u, y, \omega)$ dans la transformée de Fourier de l'équation différentielle :

$$\frac{\partial^2 F(u, y, \omega)}{\partial y^2} = u^2 F(u, y, \omega) - \frac{\omega^2}{c^2} F(u, y, \omega) \quad (60)$$

Le problème de rétropropagation consiste à résoudre cette équation différentielle en fonction de la profondeur y connaissant les conditions initiales en $y=0$. La forme de la solution de cette équation différentielle linéaire à coefficients constants (u et ω sont

fixés) dépend du signe du coefficient de $F(u, y, \omega)$ soit $\left(u^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)$.

Si ce coefficient est positif, la solution de l'équation différentielle est une exponentielle réelle et son énergie est finie : elle s'amortit rapidement et ne se propage guère. Si ce coefficient est négatif, la solution est une exponentielle complexe et il y a propagation de l'onde en fonction de y : on peut écrire :

$$F(u, y, \omega) = F(u, 0, \omega) \exp jky \quad (61)$$

avec $k^2 = \omega^2 / c^2 - u^2$ (62)

La solution complète devrait être de la forme d'une somme de deux exponentielles de phases opposées, mais on peut interpréter cette somme comme la combinaison d'une onde se propageant vers le haut ($k > 0$) et d'une onde se propageant vers le bas ($k < 0$) ;

or on s'intéresse à la propagation de l'onde ascendante qu'on cherche à reconstituer et on ne garde qu'une des deux composantes exponentielles.

La propagation peut s'interpréter comme un filtrage linéaire en fonction de la profondeur y .

Les composantes des signaux $f(x, 0, t)$ qui sont propagées le sont sans subir de pertes ; elles sont filtrées par un filtre de gain

unité et dont le déphasage pour la profondeur y est $y \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - u^2}$. La

visualisation de l'onde en fonction de x , y et t permet de reconstituer sa propagation et, en particulier, de trouver les instants et les profondeurs où l'onde a été réémise par réflexion sur une surface séparant deux couches de caractéristiques acoustiques différentes. Le résultat peut être un complément d'information utile pour les spécialistes qui cherchent des indications sur la constitution du sous-sol.

2.1.3 Analyse par formation de voie

On cherche à filtrer un signal de manière à en extraire une composante particulière (par exemple, dans une bande de fréquences donnée, à une vitesse donnée et dans une direction donnée), ce qui revient souvent à extraire une composante quasi sinusoïdale dans un espace à quatre dimensions. Cela peut se faire grâce à un filtre passe-bande sélectif.

La **formation de voie** consiste à extraire d'un signal les composantes se propageant dans une direction particulière et à une vitesse donnée (mais les composantes peuvent être de fréquences différentes). Dans l'espace des fréquences, on cherche alors à estimer l'amplitude et la phase des sinusoïdes à l'intersection d'un cône caractérisant la vitesse et d'un plan caractérisant la direction.

L'estimation de ce signal se fait grâce à la mesure du signal $s(\vec{x}, t)$ par un réseau de K capteurs, le capteur numéro k étant situé au point \vec{x}_k . Le signal temporel $h_k(t)$ reçu par le capteur numéro k de ce réseau peut être amplifié par un gain g_k et retardé d'un temps τ_k . Le signal final de la formation de voie est la moyenne de ces différents signaux (figure 11) :

$$f(t) = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} g_k h_k(t - \tau_k) \quad (63)$$

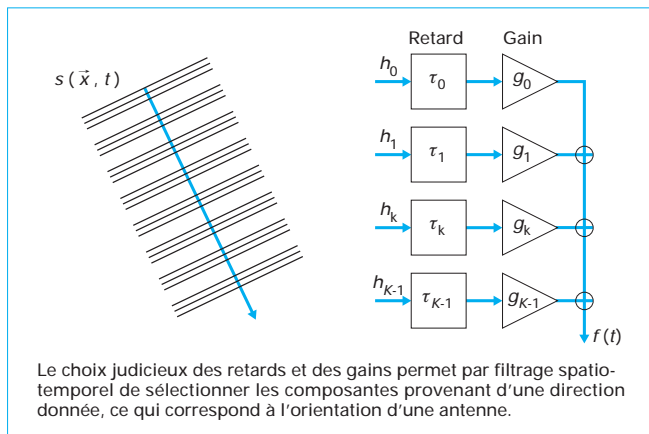


Figure 11 – Schéma donnant le calcul du signal en formation de voie

Le choix approprié des gains et des retards permet d'« orienter » le réseau de capteurs dans une direction donnée et de sélectionner une fréquence particulière.

Supposons que le signal capté soit une sinusoïde :

$$s(\vec{x}, t) = \exp j\omega(t - \vec{\alpha} \cdot \vec{x}) \quad (64)$$

la sortie du capteur numéro k est :

$$h_k(t) = s(\vec{x}_k, t) = \exp j\omega(t - \tau_k - \vec{\alpha} \cdot \vec{x}_k) \quad (65)$$

Le signal formé sera :

$$f(t) = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} g_k \exp j\omega(t - \tau_k - \vec{\alpha} \cdot \vec{x}_k) \quad (66)$$

Supposons que les retards τ_k soient reliés aux positions \vec{x}_k de manière à sélectionner une onde plane se propageant dans la direction $\vec{\alpha}_0$ à la vitesse $1/|\vec{\alpha}_0|$:

$$\tau_k = -\vec{\alpha}_0 \cdot \vec{x}_k \quad (67)$$

La sortie $f(t)$ sera alors :

$$f(t) = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} g_k \exp j\omega \left[t + (\vec{\alpha}_0 - \vec{\alpha}) \cdot \vec{x}_k \right] \quad (68)$$

Le signal formé est un signal sinusoïdal de pulsation ω dont l'amplitude est :

$$G(\omega(\vec{\alpha}_0 - \vec{\alpha})) = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} g_k \exp [j\omega(\vec{\alpha}_0 - \vec{\alpha}) \cdot \vec{x}_k] \quad (69)$$

Cette amplitude dépend de la position des capteurs (\vec{x}_k) et de la différence $(\vec{\alpha}_0 - \vec{\alpha})$ entre la direction d'arrivée de l'onde et de l'orientation du réseau. Si l'on considère la variable :

$$\vec{u} = -\omega(\vec{\alpha}_0 - \vec{\alpha}) \quad (70)$$

le signal obtenu est la transformée de Fourier de la configuration du réseau prenant en compte la position des capteurs et le gain affecté à chacun d'entre eux :

$$G(\vec{u}) = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} g_k \exp j(\vec{u} \cdot \vec{x}_k) \quad (71)$$

L'effet de la géométrie du réseau peut être assimilé à celui d'une fenêtre de pondération d'analyse spectrale.

Si le réseau est orienté dans la direction α de l'onde et sélectionne uniquement les ondes se propageant à la vitesse $c = 1/|\vec{\alpha}|$, le signal temporel obtenu en sortie du réseau sera une sinusoïde dont le gain sera donné par la valeur de $G(u)$ pour $u = 0$, soit $G(0)$.

Cela est vrai quelle que soit la pulsation temporelle ω du signal se propageant avec une vitesse donnée et dans une direction donnée : le signal n'est pas déformé par le réseau de capteurs lorsque ses paramètres de retard sont correctement ajustés.

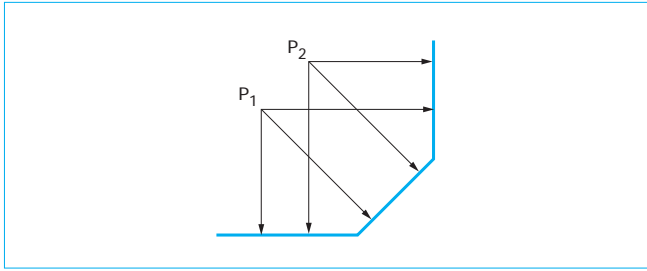


Figure 12 – Trois projections d'un objet composé de deux points permettent de retrouver la forme de l'objet, c'est-à-dire les coordonnées des deux points dans l'espace xOy

2.2 Reconstitution d'images à partir de projections

Dans ce paragraphe, nous verrons comment les résultats théoriques concernant les projections de Radon sont utilisés pour traiter les problèmes de reconstruction d'images, en particulier dans des applications biomédicales comme la tomographie et l'imagerie par résonance magnétique nucléaire. Le principe de cette reconstruction est relativement simple : quand on regarde une source lumineuse à travers des objets plus ou moins transparents ou opaques (comme une radiographie), on voit ces objets en projection. Si l'on regarde les objets sous un autre angle, on en a une vue (ou une projection) différente. On imagine bien qu'on peut reconstruire l'objet à partir des projections vues sous des angles différents. C'est ce qui se passe dans un cas plus simple lorsqu'on fait de la triangulation : supposons que l'objet soit composé de deux points P_1 et P_2 de coordonnées (x_1, y_1) et (x_2, y_2) dans le plan comme dans la figure 12. On mesure les projections de ces deux points sur trois droites. Si on trace les droites passant par ces projections et perpendiculaires aux droites de projection, trois de ces droites se coupent en chacun des deux points P_1 et P_2 . Il n'y a pas d'autres points par lesquels passent trois droites. Le principe de reconstruction en tomographie n'est pas exactement celui-là, mais les idées sont assez similaires.

2.2.1 Théorème de projection de Radon

Le résultat fondamental pour la reconstitution d'images en tomographie a été vu au paragraphe 2 de [AF 1 441]. On construit à partir d'une fonction $f(x, y)$ la fonction :

$$g(\theta, \rho) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(\rho \cos \theta - z \sin \theta, \rho \sin \theta + z \cos \theta) dz \quad (72)$$

ce qui correspond à une intégration de la fonction $f(x, y)$ le long d'une oblique de pente $-\tan \theta$ passant par le point de coordonnées $(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ (figure 13).

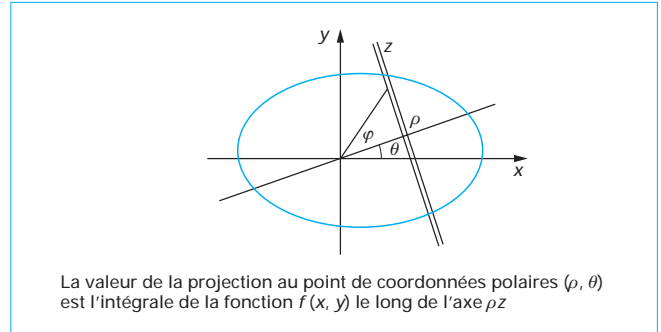
On considère, en particulier, le cas où la pente $\tan \theta$ est nulle. Dans ce cas, la valeur de la transformée $F(u, 0)$ est :

$$F(u, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-j(u \cdot x + 0y)] dx dy \quad (73)$$

Elle est égale à la transformée de Fourier monodimensionnelle $G(0, \omega)$ de la projection de Radon sur l'axe de pente nulle (cf. équation (57) de [AF 1 441]) :

$$G(0, \omega) = F(\omega, 0) \quad (74)$$

C'est la composante à la fréquence $\nu = 0$ évaluée le long de l'axe des abscisses ($\omega = u$) dans le plan des fréquences. On retrouve le résultat pour une projection d'angle quelconque en appliquant le théorème sur l'effet d'une rotation sur la transformée de Fourier vu



La valeur de la projection au point de coordonnées polaires (ρ, θ) est l'intégrale de la fonction $f(x, y)$ le long de l'axe ρz

Figure 13 – Schéma du calcul de projection en tomographie

dans [AF 1 441] : une rotation dans le domaine spatial se traduit par une rotation dans le domaine des fréquences et on obtient un résultat analogue à l'équation (74) quand on effectue la projection sur un axe d'angle θ :

$$G(\theta, \omega) = F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta) \quad (75)$$

La transformée de la fonction projetée sur l'axe de direction θ est égale à la valeur de la transformée de Fourier de la fonction bidimensionnelle initiale $F(u, v)$ évaluée le long d'un axe de pente θ .

2.2.2 Mesure de projections

Un signal traversant un milieu absorbant d'épaisseur Δy subit une diminution d'amplitude :

$$A(y + \Delta y) = A(y) \exp[-f(y) \Delta y] \quad (76)$$

Lorsque ce signal se propage le long d'un parcours linéaire, son amplitude se réduit en suivant la loi :

$$A(Y) = A(-Y) \exp\left[-\int_{-Y}^Y f(y) dy\right] \quad (77)$$

Le signal mesuré est $a(Y)$. L'amplitude du signal au niveau de la source émettrice avant son atténuation par l'objet traversé est supposée constante $A(-Y) = 1$ et l'atténuation $f(y)$ est nulle en dehors de l'objet analysé (l'intervalle $[-Y, Y]$).

Dans un espace à deux dimensions, on peut analyser une région du plan caractérisée par une atténuation $f(x, y)$ en déplaçant la source émettrice et le capteur le long de l'axe des abscisses :

$$a(x) = \exp\left[-\int_{-Y}^Y f(x, y) dy\right] \quad (78)$$

Nous supposons que le capteur et l'émetteur sont situés à l'infini.

On fait subir une rotation d'angle θ à l'émetteur engendrant le signal et au capteur sans bouger l'objet analysé $f(x, y)$, ce qui donne une fonction projetée dépendant du paramètre θ et où la variable x est remplacée par la variable ρ donnant la position d'un point sur l'axe de direction θ passant par l'origine (figure 13) donne alors la distance (signée) d'un point à cet axe :

$$a'(\theta, \rho) = \exp\left[-\int_{-\infty}^{\infty} f(\rho \cos \theta - z \sin \theta, \rho \sin \theta + z \cos \theta) dz\right] \quad (79)$$

Pour chaque analyse dans une direction θ , on dispose d'une fonction mesurée $\ln a'(\theta, \rho)$. Le problème de la reconstitution du signal revient à calculer la fonction $f(x, y)$ à partir des valeurs des fonctions projetées $\ln a'(\theta, \rho)$.

2.2.3 Reconstruction

On peut envisager la reconstitution du signal bidimensionnel $f(x, y)$ en utilisant le théorème de Radon.

On mesure différentes fonctions projetées pour différentes valeurs de θ de la fonction $f(x, y)$; on en prend la transformée de Fourier. On reporte cette transformée de Fourier monodimensionnelle le long de l'axe de direction θ dans le plan des fréquences bidimensionnel (u, v) ; on réalise, par sommation de ces portions de transformées de Fourier bidimensionnelles, une reconstitution estimée de $F(u, v)$ et, par transformée de Fourier inverse, on obtient la fonction cherchée $f(x, y)$.

Le défaut majeur de cette technique de reconstitution est la nécessité d'utiliser à la fois des représentations en coordonnées polaires (pour estimer la transformée de Fourier bidimensionnelle à partir de celles des projections) et en coordonnées cartésiennes pour effectuer le calcul de la transformée de Fourier inverse. Cette utilisation de deux systèmes de coordonnées et la discrétisation du domaine des fréquences imposent la réalisation d'interpolations dans le domaine des fréquences, interpolations qui sont délicates quand les variations de phases des transformées de Fourier d'une projection à la projection voisine sont importantes et leur mauvaise reconstitution peut avoir des conséquences néfastes sur la qualité de l'image reconstituée.

2.2.4 Reconstitution dans le domaine spatial. Formule de Radon

Il est aussi possible d'effectuer les calculs dans le domaine spatial en conservant une représentation en coordonnées polaires dans le domaine des fréquences. La transformée de Fourier inverse du signal est :

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) \exp j(ux + vy) \, du \, dv \quad (80)$$

Si l'on prend la représentation en coordonnées polaires de $F(u, v)$, on obtient une fonction $G(\theta, \omega)$ qui n'est autre que la transformée de Fourier de la fonction projetée. On peut alors effectuer un changement de variables et écrire :

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} G(\theta, \omega) \exp j(\omega x \cos \theta + \omega y \sin \theta) \omega \, d\omega \, d\theta \quad (81)$$

Dans cette expression, on effectue le calcul sur un demi-axe d'angle θ et on fait varier cet angle θ de $-\pi$ à π ; on peut aussi écrire cette formule en effectuant une intégration sur l'axe complet (ω variant de $-\infty$ à ∞) en restreignant l'intégration de θ au support $(0, \pi)$ et en remplaçant le facteur ω qui est toujours positif par $|\omega|$. On obtient alors :

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\theta, \omega) \exp j(\omega x \cos \theta + \omega y \sin \theta) |\omega| \, d\omega \, d\theta \quad (82)$$

On écrit $f(x, y)$ dans un système de coordonnées polaires (ρ, φ) :

$$\begin{aligned} r(\rho, \varphi) &= f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\theta, \omega) \exp j\omega\rho (\cos \varphi \cos \theta + \sin \varphi \sin \theta) |\omega| \, d\omega \, d\theta \end{aligned} \quad (83)$$

qu'on réécrit :

$$r(\rho, \varphi) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\theta, \omega) \exp j\omega\rho \cos(\varphi - \theta) |\omega| \, d\omega \, d\theta \quad (84)$$

En fixant θ et en posant :

$$z = \rho \cos(\varphi - \theta) \quad (85)$$

on fait apparaître une transformée de Fourier inverse :

$$r(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| G(\theta, \omega) \exp j\omega z \, d\omega \right] d\theta \quad (86)$$

On commence par calculer la reconstitution partielle dans le domaine spatial pour tous les points tels que :

$$\rho \cos(\varphi - \theta) = z \quad (87)$$

Ces points sont situés sur une droite. On effectue ainsi une « retroprojection », la valeur :

$$h(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\theta, \omega) \exp j\omega\rho \cos(\varphi - \theta) |\omega| \, d\omega \quad (88)$$

est calculée en fonction de ρ (θ est fixé). Elle est assignée à tous les points de la droite (87).

Ce calcul de $h(\rho, \theta)$ est répété pour différentes valeurs de θ ; on effectue pour chacune de ces valeurs de θ la retroprojection et on additionne les résultats partiels pour obtenir l'image reconstituée, ce qui correspond à la sommation sur θ .

Le calcul de $h(\rho, \theta)$ est celui de la transformée de Fourier du produit de $G(\theta, \omega)$ par $|\omega|$. Il peut donc s'interpréter comme une convolution et être effectué dans le domaine spatial (monodimensionnel) plutôt que dans le domaine des fréquences. Il s'agit alors de filtrer la fonction projetée $g(\theta, r)$ par le filtre dont la réponse en fréquence est $|\omega|$ (figure 14). En théorie, ce calcul pose quelques difficultés : la réponse en fréquence du filtre s'écrit ω signe (ω). On ne peut pas écrire formellement la réponse impulsionnelle correspondante car c'est une fonction généralisée. Mais on peut exprimer les deux opérations qu'il faut effectuer sur $g(\theta, r)$ pour obtenir $h(\rho, \theta)$:

il faut calculer la transformée de Hilbert de $g(\theta, r)$ puis dériver cette expression :

$$h(\rho, \theta) = \frac{d}{d\rho} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\theta, s)}{\rho - s} \, ds \right) \quad (89)$$

où l'intégrale est une intégrale en valeur principale.

Cette formule de Radon permet d'obtenir une autre classe d'algorithmes pour réaliser la reconstitution du signal spatial sans faire intervenir de transformations de Fourier ; on peut bien sûr faire le calcul de ce signal monodimensionnel dans le domaine des fréquences.

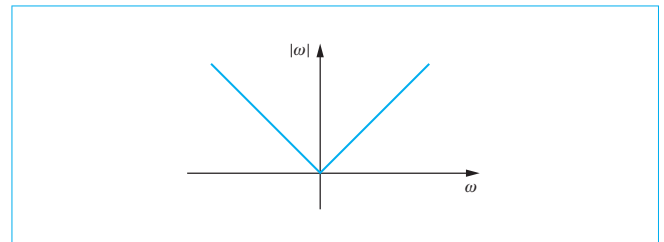


Figure 14 – Réponse en fréquence du filtre à appliquer aux projections avant retroprojection

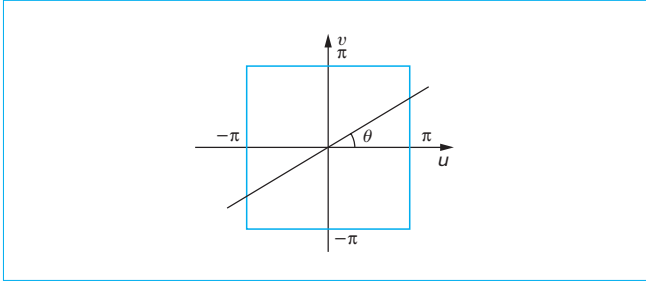


Figure 15 – Support de la transformée de Radon pour un signal à bande spectrale limitée à un support carré

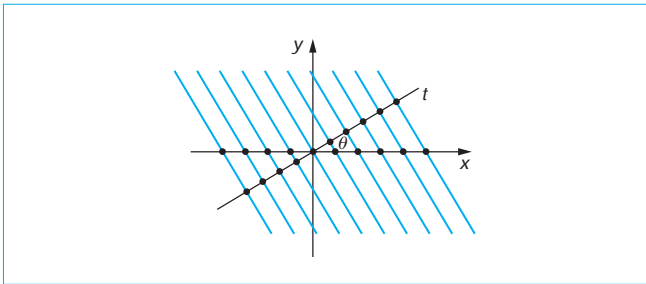


Figure 16 – Pas maximum d'échantillonnage de la projection de Radon sur le support de la projection Ot et sur l'axe des abscisses Ox

2.2.5 Mise en œuvre cohérente avec le théorème d'échantillonnage dans le cas des signaux à bande limitée

Dans les applications, on traite des signaux à bande limitée et échantillonnés et ce problème théorique de calcul d'intégrale ne se pose pas.

Nous envisagerons la reconstruction dans le cas de signaux qui sont des fonctions continues de x et de y filtrés passe-bas, avant échantillonnage. Si le domaine occupé par le signal dans le plan des fréquences est $(-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$, une projection suivant un angle θ (que nous supposons inférieur à $\pi/4$) aura pour support dans le domaine des fréquences $-\frac{\pi}{\cos \theta}, \frac{\pi}{\cos \theta}$ (figure 15). Si la

fonction bidimensionnelle $s(x, y)$ étudiée a pour transformée de Fourier une fonction constante dans le domaine $(-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$ et nulle partout ailleurs, elle vaut :

$$s(x, y) = \frac{\sin \pi x}{\pi x} \frac{\sin \pi y}{\pi y} \tag{90}$$

Sa projection $h(t)$ aura pour transformée de Fourier monodimensionnelle $H(\exp j\omega)$ qui est une fonction constante dans l'intervalle $-\frac{\pi}{\cos \theta}, \frac{\pi}{\cos \theta}$ et nulle ailleurs. Elle vaut donc :

$$h(t) = \frac{\sin(\pi t \cos \theta)}{\pi t \cos \theta} \tag{91}$$

La fonction projetée de $(\sin \pi x/\pi x) \times (\sin \pi y/\pi y)$ est ainsi $(\sin \pi t \cos \theta)/(\pi t \cos \theta)$.

Plutôt que d'échantillonner la projection suivant l'axe Ot (projection orthogonale) avec un pas d'échantillonnage $\cos \theta$, on peut la calculer sur l'axe Ox (projection oblique) avec un pas d'échantillonnage égal à un (figure 16).

La projection mesurée le long de l'axe Ot a un support dans le domaine spectral $(-\frac{\pi}{\cos \theta}, \frac{\pi}{\cos \theta})$ et nécessite donc un échantillonnage suivant un pas égal à $\cos \theta$. Si on la représente sur l'axe Ox, c'est-à-dire après une dilatation de $\frac{1}{\cos \theta}$, son support dans le domaine des fréquences sera $(-\pi, \pi)$ (théorème sur la transformée de Fourier d'une fonction dilatée) ; on pourra donc l'échantillonner suivant un pas de un. L'image « analogique » est la convolution de la séquence des échantillons $f(m, n)$ avec $s(x, y)$. En appliquant l'opération de projection à $s(x, y)$, la fonction projetée s'écrit :

$$g(\theta, x) = \sum_m \sum_n f(m, n) \frac{\sin \pi [(x-m) \cos \theta - n \sin \theta]}{(x-m) \cos \theta - n \sin \theta} \tag{92}$$

■ Mise en œuvre

Nous pouvons supposer que les projections sont calculées sur l'axe des abscisses lorsque :

$$-\frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{\pi}{4} \tag{93}$$

et sur l'axe des ordonnées lorsque :

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{3\pi}{4} \tag{94}$$

Dans les deux cas, la fréquence d'échantillonnage sur les projections sera toujours égale à 2π et le pas d'échantillonnage sera toujours égal à un pour toutes les valeurs de θ . On applique, à chaque projection, le filtre dont la réponse en fréquence est $|w|$, ce qui donne $h(\theta, x)$. On peut calculer la réponse impulsionnelle de ce filtre et faire un calcul de convolution, mais il est préférable de faire les calculs sous la forme d'un produit dans le domaine des fréquences car c'est plus économique en nombre d'opérations et cela facilite le calcul des rétroprojections $r_\theta(x, y)$: le calcul des rétroprojections revient à décaler $h(\theta, x)$ d'une valeur proportionnelle à l'ordonnée :

$$r_\theta(x, y) = h(\theta, x - y \tan \theta) \tag{95}$$

L'effet du retard se calcule directement par un déphasage linéaire dans le domaine des fréquences. On calcule ensuite la somme des rétroprojections obtenues pour les différents angles. On répète cette séquence d'opérations pour les projections effectuées sur l'axe des ordonnées (pour les angles supérieurs à $\pi/4$) et on additionne les résultats.

■ Optimisation du résultat

On remarque que les opérations utilisées sont des opérations linéaires invariantes par translation. L'effet du calcul des projections et de la reconstruction peut donc être caractérisé par la réponse impulsionnelle de cet ensemble d'opérations, soit $p(x, y)$. Lorsque le nombre de projections est fini, on voit que la reconstruction est imparfaite : la reconstruction $n(x, y)$ est le résultat de la convolution de l'image initiale et du filtre $p(x, y)$. (Bien sûr, la reconstruction s'améliore lorsque l'on augmente le nombre de projections.) Améliorer la reconstruction revient à résoudre cette équation de convolution bidimensionnelle.

On peut aussi aboutir à une formulation comparable en se fondant sur une interprétation dans le domaine des fréquences. Si la transformée de Fourier de l'objet analysé $f(x, y)$ est $F(u, v)$ (nous supposons que l'objet est de support fini) :

$$F(u, v) = \sum_{x=-L/2}^{(L/2)-1} \sum_{y=-L/2}^{(L/2)-1} f(x, y) \exp -j(ux + vy) \tag{96}$$

on a théoriquement, d'après le théorème sur les projections de Radon :

$$F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta) = G(\theta, \omega) \tag{97}$$

On peut donc chercher à minimiser l'écart :

$$\sum_{\omega} \sum_{\theta} |F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta) - G(\theta, \omega)|^2 \tag{98}$$

ce qui mène à la recherche de la solution d'une équation de convolution dans le domaine spatial.

Cette équation de convolution fait intervenir la réponse impulsionnelle de l'ensemble des opérations projections, filtrage, rétro-projections. Les résultats sont exacts dans le cas où il n'y a pas de bruit sur les données. En présence de bruit, il faut prendre en compte les contraintes traduisant les hypothèses du problème et les caractéristiques du bruit.

2.3 Imagerie par résonance magnétique nucléaire

Une autre technique importante d'imagerie médicale est l'imagerie par résonance magnétique nucléaire. Le principe de génération des signaux permettant de reconstituer cette forme d'images est complètement différent. Cependant, la mise en équation et l'interprétation dans le domaine des fréquences montrent que le formalisme mathématique de la reconstruction est très similaire à celui étudié dans le paragraphe consacré à la tomographie.

L'analyse des composants chimiques et l'imagerie par résonance magnétique nucléaire reposent sur des bases physiques qui sont bien au-delà des objectifs de cette présentation. Voici une présentation succincte et très approximative des principes mis en œuvre.

2.3.1 Équations fondamentales de la résonance magnétique nucléaire

Parmi les 250 noyaux d'atomes stables, plus de 100 possèdent un moment magnétique (un spin) \vec{M} . Si ces noyaux sont placés dans un champ magnétique \vec{B} , ils obéissent à l'équation de Bloch :

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma \vec{M} \wedge \vec{B} \tag{99}$$

Rappelons que le produit vectoriel \vec{c} de deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} noté $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ se calcule dans un système de coordonnées cartésiennes par $c_x = a_y b_z - a_z b_y$, $c_y = a_z b_x - a_x b_z$, $c_z = a_x b_y - a_y b_x$.

Les aimants s'alignent dans la direction du champ et tournent autour de cet axe à une fréquence ω_0 (fréquence de Larmor) proportionnelle au champ magnétique :

$$\vec{\omega}_0 = -\gamma \vec{B} \tag{100}$$

Si on ajoute à ce champ fixe une onde électromagnétique dont la fréquence est proche la fréquence propre (de résonance) ω_0 , la direction des aimants que sont ces noyaux s'écarte de l'axe \vec{B} . Lorsqu'on arrête l'émission de l'onde électromagnétique, les protons reviennent à leur état d'équilibre (aimants tournant autour de l'axe du champ fixe) en émettant une onde électromagnétique qui est une sinusoïde amortie dont la fréquence est la fréquence propre du noyau dans le champ \vec{B} . Cette onde est captée par

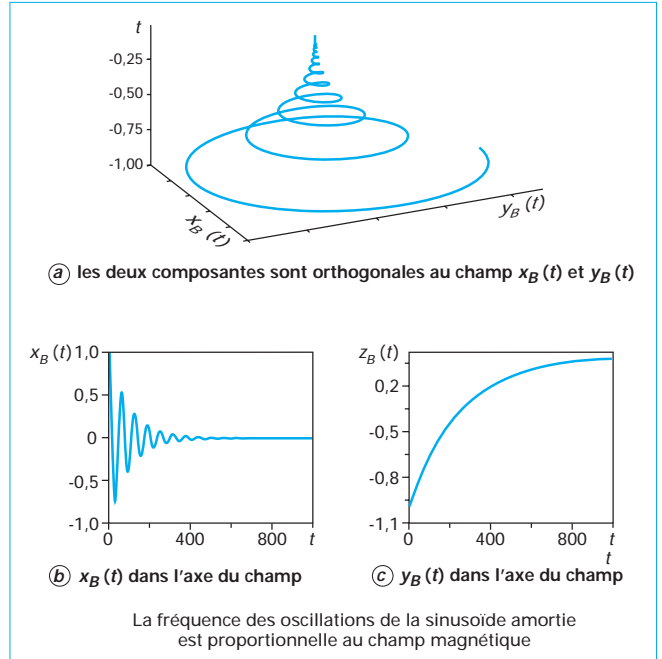


Figure 17 - Illustration du retour à l'équilibre (*Free Induction Decay*) dans le sens du champ magnétique fixe des moments magnétiques après suppression de l'excitation radioélectrique

l'antenne qui a engendré l'onde et se traduit sous la forme d'une fonction temporelle, le FID (« *Free Induction Decay* »). L'évolution de ce signal s'écrit en fonction du temps (figure 17) :

$$x_B(t) = x_B(0) \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right) \cos(\omega_0 t) \tag{101}$$

$$y_B(t) = -x_B(0) \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right) \sin(\omega_0 t) \tag{102}$$

$$z_B(t) = z_B(\infty) - [z_B(\infty) - z_B(0)] \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right) \tag{103}$$

La composante $z_B(t)$ dans l'axe du champ B s'amortit sans osciller avec une constante de temps T_1 ; la composante orthogonale à B tourne à la fréquence ω_0 et s'amortit avec une constante de temps T_2 . T_1 est nettement plus grande que T_2 . Ces deux constantes de temps sont caractéristiques des éléments étudiés. La fréquence ω_0 est fonction de l'élément chimique étudié et de la relation entre le noyau et les noyaux des atomes qui se trouvent dans son voisinage. Elle est proportionnelle au champ magnétique appliqué. Pour l'analyse chimique, on cherchera à réaliser des champs magnétiques constants dans la portion d'espace où l'on place l'objet à analyser, pour ne pas avoir de dégradation des mesures du fait des fluctuations de ce champ. En visualisation bidimensionnelle ou tridimensionnelle, les objectifs sont différents.

2.3.2 Imagerie par résonance magnétique nucléaire

Dans ce type d'application, on n'étudie qu'un seul élément chimique, et les variations de la fréquence de relaxation (de retour à l'équilibre) ne dépendent que de l'amplitude du champ \vec{B} . L'amplitude des oscillations dépend de la densité (nombre par unité de volume) d'atomes du type analysé, par exemple de l'hydrogène. En

construisant un champ $\vec{B}(x, y, z)$ variant dans l'espace, on pourra mettre en évidence la variation spatiale de la densité d'un composant. En particulier, si on réalise une variation linéaire de l'amplitude de $\vec{B}(x, y, z)$ dans une direction, on obtiendra une composante de la transformée de Fourier tridimensionnelle de l'objet étudié.

Si le gradient de $\vec{B}(x, y, z)$ est constant, $\vec{B}(x, y, z)$ s'écrit en fonction des composantes de ce gradient :

$$\vec{B}(x, y, z) = \vec{B}(0, 0, 0) + x\vec{G}_x + y\vec{G}_y + z\vec{G}_z \quad (104)$$

Les trois composantes B_x , B_y et B_z de \vec{B} sont des fonctions linéaires des coordonnées, soit xG_x , yG_y et zG_z .

Le signal RMN (ou FID) mesuré par l'antenne est la somme des signaux émis par tous les atomes.

Par exemple la relaxation dans le plan orthogonal à \vec{B} s'écrit en fonction de la densité $\rho(x, y, z)$ de l'atome étudié :

$$s(t) = \iiint \rho(x, y, z) \exp \left[-t \left(\frac{1}{T_2} - j\omega_0 \right) + j\gamma(xG_x + yG_y + zG_z)t \right] dx dy dz \quad (105)$$

On remarque que $s(t) \exp t \left(\frac{1}{T_2} - j\omega_0 \right)$ est la valeur de la transformée de Fourier de $\rho(x, y, z)$ calculée à la fréquence spatiale à trois composantes $\gamma G_x t$, $\gamma G_y t$, $\gamma G_z t$. Une mesure RMN avec un choix de la direction du gradient donne ainsi la valeur de la transformée de Fourier 3D le long d'un axe dont la direction est donnée par celle du gradient. On peut ainsi remplir l'espace des fréquences en effectuant des séquences de mesures pour lesquelles on modifie la direction du gradient. On a le même type de données que celles utilisées en tomographie et on pourrait effectuer une reconstruction d'images soit par filtrage et rétroprojection, soit par reconstruction dans le domaine des fréquences. Toutefois, un contrôle fin de la phase des composantes du signal FID par modification dynamique du gradient \vec{G} permet de caractériser les variations de $\rho(x, y, z)$ dans le plan orthogonal à \vec{B} . Les images ainsi obtenues sont d'une qualité remarquable.

Exemple : quelques chiffres et ordres de grandeur

Le champ magnétique fixe \vec{B} a une amplitude de 500 à 15 000 Gauss et un gradient de 0,01 à 1 Gauss/cm, ce qui donnera une résolution de l'ordre d'une fraction de millimètre. L'onde radiofréquence engendrant la résonance a une fréquence de l'ordre de 10 à 100 MHz : dans un champ B de 1 tesla, l'hydrogène ^1H résonne à 42,57 MHz (l'hydrogène est l'élément étudié en imagerie clinique), le phosphore ^{31}P à 172,4 MHz, le carbone ^{13}C à 10,70 MHz, le sodium ^{23}Na à 11,26 MHz. Les constantes de temps sont de l'ordre de 1 s pour T_1 et de 50 ms pour T_2 .

2.4 Transformée de Fourier et propagation d'ondes en optique cohérente ou en électromagnétisme

L'hypothèse de la nature ondulatoire (sinusoïdale) de la lumière a été proposée par Christian Huygens en 1678. Elle fut affinée dans la théorie de la diffraction d'Augustin Fresnel en 1818, et formalisée de manière plus rigoureuse par Gustav Kirchhoff (1882), puis par Rayleigh et Sommerfeld (1896). Le développement de ce modèle établit un lien entre l'optique et l'analyse de Fourier.

2.4.1 Franges d'interférence

Une source lumineuse ponctuelle monochromatique notée k , d'amplitude complexe s_k et de fréquence ω , située au point de coordonnées (x_k, y_k, z_k) émet un rayonnement se propageant à la vitesse c . Ce rayonnement mesuré en un point de coordonnées (x, y, z) a pour amplitude complexe :

$$f_k(u, v, z, t) = s_k \exp \left(-j\omega \left[t - \frac{1}{c} \sqrt{(u-x_k)^2 + (v-y_k)^2 + (z-z_k)^2} \right] \right) \quad (106)$$

où on a supprimé le facteur traduisant la diminution de l'intensité en fonction de la distance qui a un effet secondaire dans le phénomène étudié ici.

Nous supposons que le signal est observé sur un plan $z=0$ très éloigné de la source k , et que la source k est située sur une sphère $x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 = R^2$.

Si z est nul et si u et v sont beaucoup plus petits que R , on peut remplacer $f_k(u, v, z, t)$ par l'approximation :

$$f_k(u, v, 0, t) = s_k \exp(-j\omega t) \exp j \frac{\omega}{c} R \sqrt{1 + \frac{2ux_k + 2vy_k}{R^2}} \quad (107)$$

où on a aussi supposé que les termes en $u^2 + v^2$ sont négligeables par rapport à $(ux_k + vy_k)$.

En effectuant un développement au premier ordre de la racine carrée, on obtient :

$$f_k(u, v, 0, t) = s_k \exp(-j\omega t) \exp j \frac{\omega}{c} R \left(1 + \frac{2ux_k + 2vy_k}{2R^2} \right) \quad (108)$$

que l'on écrit :

$$f_k(u, v, 0, t) = s_k \exp(-j\omega t) \exp j \frac{\omega R}{c} \exp \left(j \frac{\omega}{c} \cdot \frac{ux_k + vy_k}{R} \right) \quad (109)$$

L'« enveloppe » (le facteur de $\exp -j\omega t$) est proportionnelle à :

$$g_k(u, v, 0) = s_k \exp j \frac{\omega}{c} \frac{ux_k + vy_k}{R} \quad (110)$$

On reconnaît dans cette formule la transformée de Fourier bidimensionnelle d'une impulsion de Dirac d'amplitude s_k située au point de coordonnées x_k et y_k . Si on additionne plusieurs sources ponctuelles, le signal observé sera :

$$h(u, v) = \sum_k s_k \exp j \frac{\omega}{c} \frac{ux_k + vy_k}{R} \quad (111)$$

Si on a deux sources de même amplitude situées aux points (x_k, y_k, z_k) et $(-x_k, -y_k, z_k)$:

$$h(u, v) = 2 \cos \frac{\omega(ux_k + vy_k)}{cR} \quad (112)$$

on observera des franges d'interférence sinusoïdales (transformée de Fourier de deux impulsions de Dirac de même amplitude) (figure 18). Si les sources ne sont plus ponctuelles mais si leur intensité est une fonction continue de x et de y , on obtiendra :

$$h(u, v) = \iint s(x, y) \exp j \frac{\omega}{c} \frac{ux + vy}{R} dx dy \quad (113)$$

Dans le plan (u, v) , on observe donc la transformée de Fourier de l'image. En pratique, on mesure le carré du module de cette transformée de Fourier.

Ces franges apparaissent comme un signal sinusoïdal dont la fréquence est proportionnelle à la distance séparant les deux

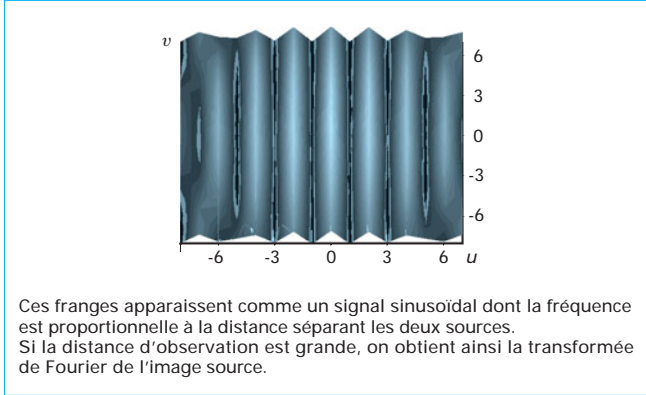


Figure 18 – Franges d'interférences obtenues à partir de deux sources ponctuelles cohérentes

sources. Si la distance d'observation est grande, on obtient ainsi la transformée de Fourier de l'image source.

■ Relations avec l'holographie

Fondée sur les propriétés des fonctions de Green, la formule de la diffraction de Rayleigh-Sommerfeld s'exprime sous la forme suivante :

si l'amplitude complexe de l'onde $f(u, v, 0)$ est connue dans un plan $z = 0$, on peut en déduire l'amplitude en un point de coordonnées (x, y, z) en calculant :

$$f(x, y, z) = \frac{1}{j\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v, 0) \frac{\exp \left[j \frac{\omega}{\lambda} \sqrt{x - u^2 + y - v^2 + z^2} \right]}{x - u^2 + y - v^2 + z^2} du dv \quad (114)$$

Si une lumière cohérente monochromatique éclaire un objet qui la réfléchit, cette lumière réfléchiée interfère en s'additionnant à la lumière incidente. On peut alors enregistrer sur une plaque photographique sensible ces interférences entre lumière incidente et lumière réfléchiée. On applique aux ondes le principe de Huygens-Fresnel, qui peut être énoncé de la manière suivante :

à un instant donné, chaque point de l'onde lumineuse est considéré comme une source émettrice d'une onde sphérique et l'amplitude de l'onde à un instant ultérieur peut être calculée comme la somme de toutes les ondes sphériques réémises.

Ainsi, si l'on connaît la valeur de l'onde dans un plan de l'espace, on peut en déduire sa propagation ultérieure au-delà de ce plan : toute l'information est contenue dans la valeur de l'onde à un instant donné dans ce plan. Si l'on regarde cette plaque photographique éclairée par la lumière cohérente, en l'absence de l'objet ayant servi à l'enregistrer, on observera la même image que celle obtenue en éclairant l'objet et qui a engendré les interférences. Si la personne qui regarde la plaque se déplace, elle verra l'objet sous un angle différent, ce qui donne une impression de relief remarquable des hologrammes.

L'holographie permet, en particulier, de calculer et de visualiser la transformée de Fourier bidimensionnelle quand la plaque d'enregistrement est située à une grande distance de l'objet ; toutefois la nature tridimensionnelle de l'objet n'apparaît plus dans ce cas.

L'analyse des structures moléculaires en cristallographie par rayons X est, elle aussi, basée sur l'interférence d'ondes réfléchies (loi de diffraction de Bragg) ; c'est ainsi un domaine où l'interprétation des résultats grâce à la transformée de Fourier joue un rôle fondamental.

2.4.2 Utilisation du bispectre en interférométrie

Un des problèmes actuels de l'astrophysique est l'augmentation de la résolution angulaire des télescopes. Il n'est pas envisageable d'augmenter la taille des télescopes. Donc les astronomes sont amenés à développer des techniques de reconstitution d'images d'objets stellaires à partir d'informations partielles. Pour obtenir ces informations partielles, ils cherchent à réaliser des interférences entre les signaux issus d'une même direction de l'espace (engendrés par la même étoile) et mesurés par des capteurs situés à une distance importante les uns des autres. Cette grande distance entre les capteurs peut être interprétée comme le diamètre d'un télescope (synthèse d'ouverture). Le signal d'interférence obtenu à partir de deux signaux issus de capteurs situés en deux points A et B est approximativement égal à un signal sinusoïdal bidimensionnel dont l'amplitude et la phase sont celles de la transformée de Fourier $F(u, v)$ du signal analysé (la répartition spatiale $f(x, y)$ de la luminosité de l'étoile) calculée pour la fréquence spatiale :

$$(u_\alpha, v_\alpha)$$

avec u_α et v_α composantes du vecteur AB.

Si l'on mesure l'amplitude et la phase des franges d'interférences pour différentes positions A et B des capteurs, on peut reconstituer la transformée de Fourier bidimensionnelle de l'image de l'objet étudié. En dehors des problèmes techniques posés par la mise au point des franges d'interférences, il existe une difficulté supplémentaire : lors de leur traversée de l'atmosphère, les ondes lumineuses subissent une perturbation. On peut considérer que cette perturbation est un déphasage aléatoire dans le temps et dans l'espace, de moyenne nulle. En l'absence de perturbation, la phase de $F(u_\alpha, v_\alpha)$ est la différence de phase entre les signaux reçus par le capteur A et le capteur B, soit $(\varphi_B - \varphi_A)$, qui ne dépend que de l'image analysée et non pas du temps. Lors des mesures à travers l'atmosphère présentant une agitation thermique, une perturbation aléatoire $\Delta\varphi_B(t) - \Delta\varphi_A(t)$ est ajoutée à cette différence de phase qui ne peut donc pas être mesurée directement.

Cependant, il est possible d'éliminer ces déphasages aléatoires en calculant un « bispectre ».

Si une fonction $f(x, y)$ a pour transformée de Fourier $F(u, v)$, son spectre d'ordre 3 (ou **bispectre**) s'écrit, dans le cas des signaux déterministes bidimensionnels :

$$B_3(u_1, u_2, v_1, v_2) = F(u_1, v_1) F(u_2, v_2) F(-u_1 - u_2, -v_1 - v_2) \quad (115)$$

L'intérêt de ce bispectre est qu'il permet d'obtenir une information de phase qui n'apparaît pas dans le calcul du spectre d'ordre 2, $|F(u, v)|^2$.

La transformée de Fourier inverse de ce bispectre est la **triple corrélation** :

$$r_3(m_1, m_2, n_1, n_2) = \sum_{x,y} f(x, y) f(x + m_1, y + n_1) f(x + m_2, y + n_2) \quad (116)$$

On considère trois points A, B et C, et on nomme α, β et γ les vecteurs AB, BC et CA. On a :

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \quad (117)$$

Si l'on mesure les amplitudes et les phases des trois composantes, on obtient :

$$F(u_\alpha, v_\alpha) = \rho(u_\alpha, v_\alpha) \exp j (\varphi(u_\alpha, v_\alpha) + \Delta\varphi_B(t) - \Delta\varphi_A(t)) \quad (118)$$

$$F(u_\beta, v_\beta) = \rho(u_\beta, v_\beta) \exp j (\varphi(u_\beta, v_\beta) + \Delta\varphi_C(t) - \Delta\varphi_B(t)) \quad (119)$$

$$F(u_\gamma, v_\gamma) = \rho(u_\gamma, v_\gamma) \exp j (\varphi(u_\gamma, v_\gamma) + \Delta\varphi_A(t) - \Delta\varphi_C(t)) \quad (120)$$

En calculant le produit de ces trois valeurs, on obtient le bispectre $B_3(u_\alpha, v_\alpha, u_\beta, v_\beta)$. Il ne fait intervenir que les variables $u_\alpha,$

v_α , u_β , v_β car les deux autres variables u_γ et v_γ se déduisent des quatre premières d'après l'équation (117) et les trois termes de déphasage aléatoires dus aux perturbations atmosphériques se compensent.

Cette propriété est connue sous le nom de **clôture (ou fermeture) de phase**. On a ainsi éliminé les perturbations aléatoires. En effectuant cette opération on a aussi éliminé les éventuelles composantes linéaires de la forme $(\lambda u + \mu v)$ présentes dans les phases $\varphi(u_\alpha, v_\alpha)$, $\varphi(u_\beta, v_\beta)$ et $\varphi(u_\gamma, v_\gamma)$. Cette élimination n'a pas de conséquences majeures car un déphasage linéaire se traduit, dans le domaine spatial, par une translation mais ne déforme pas l'image analysée. Si l'on excepte cette translation, le bispectre contient l'information $F(u, v)$. Il faut maintenant déduire $F(u, v)$ de $B_3(u_\alpha, v_\alpha, u_\beta, v_\beta)$.

Le module de $F(u, v)$ se déduit de l'analyse spectrale d'ordre 2 ; le bispectre est surtout utile pour la reconstitution de la phase de $F(u, v)$ qui est très informative dans la représentation de la forme de l'image de l'objet étudié.

Pour déduire la phase $\varphi(u, v)$ de $F(u, v)$ de la phase $\psi(u_\alpha, v_\alpha, u_\beta, v_\beta)$ de $B_3(u_\alpha, v_\alpha, u_\beta, v_\beta)$, on peut utiliser l'algorithme suivant : on fixe arbitrairement (par exemple à 0) deux premières valeurs de la phase $\varphi(u_\alpha, v_\alpha)$, $\varphi(u_\beta, v_\beta)$. Ce choix arbitraire revient simplement à se fixer la translation que subira l'image. Si l'on a mesuré $\psi(u_\alpha, v_\alpha, u_\beta, v_\beta)$, on peut donc en déduire la phase φ en un troisième point du plan des fréquences :

$$\varphi(-u_\alpha - u_\beta, -v_\alpha - v_\beta) = -\psi(u_\alpha, v_\alpha, u_\beta, v_\beta) + \varphi(u_\alpha, v_\alpha) + \varphi(u_\beta, v_\beta) \quad (121)$$

L'image analysée est réelle et sa phase est une fonction impaire :

$$\varphi(-u, -v) = -\varphi(u, v) \quad (122)$$

On connaît alors la phase en six points du plan des fréquences : $\alpha, -\alpha, \beta, -\beta, \gamma, -\gamma$. Il y a clôture de phase pour le triplet (α, β, γ) et pour le triplet $(-\alpha, -\beta, -\gamma)$. Si, maintenant, on mesure simultanément la phase pour les fréquences $\alpha, -\gamma$ et $(-\alpha + \gamma)$ et si l'on calcule le bispectre associé à ce triplet, on peut donc en déduire la phase non perturbée $\varphi(u, v)$ à la fréquence $(-\alpha + \gamma)$.

Par un choix judicieux du triplet de fréquences pour lequel on calcule le bispectre, on peut donc augmenter le nombre d'échantillons du plan des fréquences pour lesquels la phase est connue. Si, de plus, on tient compte d'informations connues *a priori* sur l'image cherchée ou d'hypothèses permettant de compléter la transformée de Fourier dans le plan des fréquences, on peut estimer cette transformée de Fourier de l'image dans la région utile du domaine bidimensionnel des fréquences et donc, par transformée inverse, reconstruire l'image de l'objet étudié.

Toutefois, ce n'est pas cette approche qui est utilisée dans les systèmes de mesure actuels : la compensation des perturbations atmosphériques se fait de manière dynamique (optique adaptative) : des déplacements des miroirs permettant de capter l'image sont asservis à la déformation d'une lumière réfléchiée par les couches élevées de l'atmosphère et compensent ces perturbations en temps réel.

2.5 Filtrage et détection de contours

De nombreux problèmes d'analyse d'images, comme la reconnaissance de formes, par exemple, nécessitent une analyse préalable où il faut découper l'image en régions homogènes séparées par des contours. Dans les cas les plus simples, les régions homogènes sont des régions où l'intensité lumineuse moyenne varie lentement en fonction des coordonnées spatiales. Les contours séparant ces régions sont des portions de l'image de faible largeur (largeur de un ou de quelques pixels) où les variations d'intensité sont importantes. Il existe une multitude de méthodes pour caractériser les régions homogènes et pour détecter les contours.

Dans le traitement d'images de ce type, les méthodes « orthodoxes » de traitement du signal ne sont pas nécessairement les plus efficaces. Il est souvent difficile de définir des critères objectifs et généraux et on est souvent amené à développer une technique bien adaptée à un problème donné, chaque problème présentant des caractéristiques particulières demandant une réponse appropriée. Toutefois, il peut tout de même être utile d'utiliser des méthodes fondées sur les outils classiques du traitement du signal comme la transformée de Fourier.

2.5.1 Analyse de textures

Les régions homogènes d'une image ne sont pas toujours des régions d'intensité constante ou des régions où les variations spatiales de l'intensité sont lentes. Il peut s'agir de régions où les caractéristiques statistiques (en particulier, les caractéristiques spectrales) ne varient pas ou varient peu. On peut ainsi caractériser ces régions par un nombre de paramètres plus élevés (par exemple, les paramètres obtenus par analyse spectrale paramétrique) et c'est le vecteur des paramètres qui varie lentement en fonction des coordonnées spatiales.

2.5.2 Détection de contours, le filtre de Canny dans le domaine des fréquences

La détection de contours est la mise en évidence d'une variation rapide ; elle est fondée sur un calcul de dérivée, qu'il faut adapter pour tenir compte des données traitées (mauvaise qualité de la mesure avec une quantification insuffisante, échantillonnage inadapté, bruit important, etc.). Un des outils considérés comme les plus intéressants pour effectuer le prétraitement des images en vue de la détection de contours est le filtre de Canny (figure 19), qui est, en général, proposé sous une forme séparable : filtrage monodimensionnel ligne par ligne puis colonne par colonne.

La réponse impulsionnelle monodimensionnelle de ce filtre est :

$$h(x) = x \exp -\alpha |x| \quad (123)$$

Ce filtre, qui est un filtre passe-bande, a un double objectif : amplifier les fréquences relativement élevées pour mettre en évidence les variations rapides dans l'image, car ces variations rapides correspondent en général aux contours, tout en filtrant autant que possible le bruit dont l'importance relative est plus grande dans les hautes fréquences. Le paramètre α doit être réglé en fonction de l'application envisagée. L'implémentation séparable est, par exemple, celle du filtre de « Canny-Deriche » sous la forme d'un filtre récursif traitant chaque ligne ou chaque colonne dans un sens puis dans l'autre. L'intérêt de cette implémentation réside dans la réduction du nombre de calculs à effectuer. Mais il peut être intéressant d'en envisager une implémentation dans le domaine des fréquences, qui peut présenter quelques avantages dans certaines applications. L'implémentation séparable dans le domaine spatial ne conserve pas l'isotropie ; un filtre ne traite pas de la même manière les verticales ou les horizontales, d'une part, et les obliques d'autre part. Si l'application autorise le traitement par transformée de Fourier, il peut être intéressant de réaliser le filtrage dans le domaine des fréquences bidimensionnelles de manière à conserver l'isotropie.

L'expression du filtre de Canny dans le domaine des fréquences est (figure 19) :

$$H(\omega) = \frac{4j\alpha\omega}{(\alpha^2 + \omega^2)^2} \quad (124)$$

C'est sur l'image filtrée ligne par ligne puis colonne par colonne que sont détectées les variations rapides du signal qui sont interprétées comme un contour ou comme du bruit.

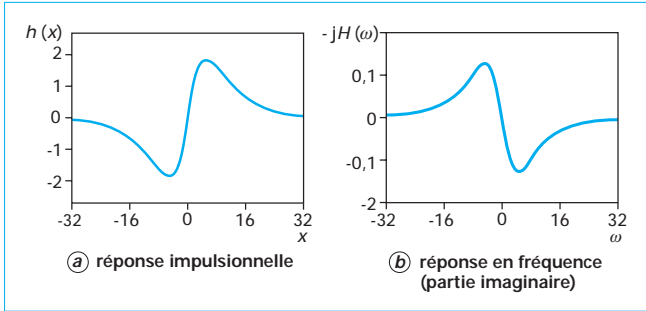


Figure 19 – Filtre de Canny

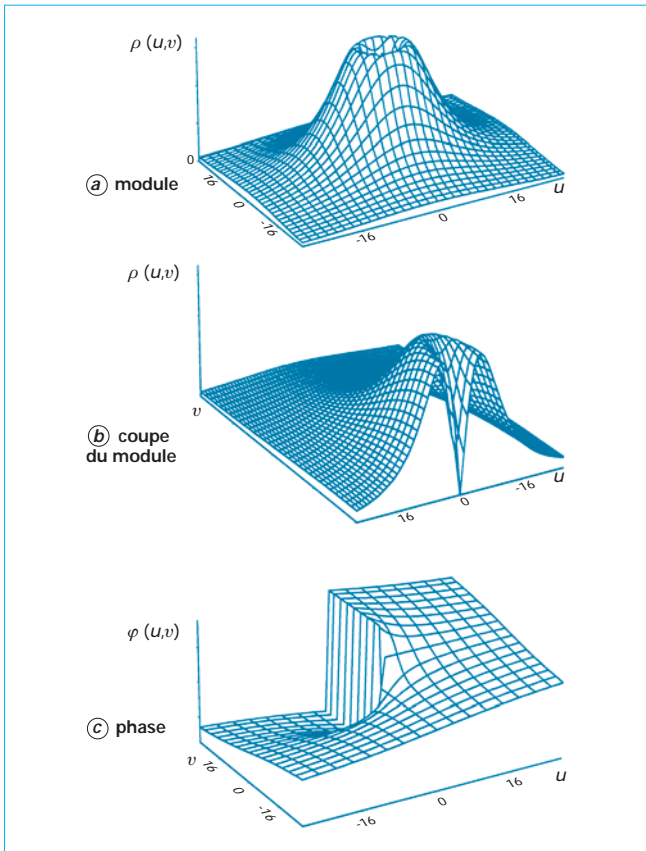


Figure 20 – Module, coupe du module et phase du filtre de Canny bidimensionnel

On peut donner une forme bidimensionnelle de ce filtre en imposant la symétrie et l'invariance par rotation :

$$H(u, v) = 4\alpha \frac{j u - v}{(\alpha^2 + u^2 + v^2)^2} \quad (125)$$

La réponse en fréquence de ce filtre (figure 20) a pour module :

$$\rho(u, v) = 4\alpha \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{(\alpha^2 + u^2 + v^2)^2} \quad (126)$$

et pour phase :

$$\varphi(u, v) = \arg(v - ju) \quad (127)$$

Ce filtre produit un signal filtré complexe : la partie réelle donne la composante du gradient suivant l'axe des abscisses et la partie imaginaire la composante suivant l'axe des ordonnées. Le module du gradient est le module de ce nombre complexe.

■ Courbure d'un contour

La réalisation d'un filtre bidimensionnel dans le domaine des fréquences permet d'effectuer certains calculs dont la réalisation serait plus difficilement envisageable dans le domaine spatial.

Nous avons déjà mentionné la formulation de la dérivation dans le cas des signaux échantillonnés ; il peut être intéressant d'utiliser cette approche, fondée sur l'expression dans le domaine des fréquences, au traitement d'images.

Exemple : soit $f(x, y)$ l'image à analyser, de transformée de Fourier $F(u, v)$. Pour calculer une dérivée partielle $\partial f / \partial x$, $\partial f / \partial y$, on peut calculer dans le domaine des fréquences, $juF(u, v)$ et $jvF(u, v)$. Il faut bien entendu tenir compte de l'éventuelle amplification du bruit dans le domaine des hautes fréquences. Les transformées des dérivées secondes $\partial^2 f / \partial x^2$, $\partial^2 f / \partial x \partial y$ et $\partial^2 f / \partial y^2$, sont respectivement $-u^2 F(u, v)$, $-uvF(u, v)$ et $-v^2 F(u, v)$.

Notons que ces formulations dans le domaine des fréquences donnent les valeurs exactes des dérivées alors que, dans le domaine spatial, on se contente souvent des valeurs approchées si elles s'avèrent suffisantes pour l'application considérée. Ces calculs de dérivées exactes permettent, par exemple, de trouver la pente précise d'un contour :

$$\arctan \left. \frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y} \right|_{x=x_0, y=y_0} \quad (128)$$

On peut aussi calculer le rayon de courbure d'un contour $\rho(x_0, y_0)$ à partir des dérivées secondes :

$$\rho(x_0, y_0) = \frac{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right]^{3/2}}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2} \Bigg|_{x=x_0, y=y_0} \quad (129)$$

Bien sûr, cette méthode est particulièrement sensible au bruit, car la double dérivation amplifie considérablement les hautes fréquences.

2.6 Conclusion

Ce survol des applications possibles de la transformée de Fourier dans différents problèmes de traitement du signal et des images montre l'intérêt de cette approche, rendue efficace par l'invention de la transformée de Fourier rapide. Toutefois, sa mise en œuvre nécessite des précautions et des vérifications soigneuses lors de son application au traitement des signaux échantillonnés et le développement d'algorithmes élaborés.