

# Analyse temps-fréquence. Ondelettes

## Théorie

par **José MARTINEZ**

*Docteur en sciences  
Ingénieur de recherche, Transiciel*

**Pierre GAJAN**

*Docteur en sciences  
Ingénieur de recherche, Office national d'études et de recherches aérospatiales (ONERA)*

et **Alain STRZELECKI**

*Docteur en sciences  
Ingénieur de recherche, ONERA*

<b>1. Décompositions linéaires continues</b> .....	AF 4 510 – 3
1.1 Fourier à fenêtre glissante .....	— 3
1.1.1 Spectre local.....	— 3
1.1.2 Analyse temps-fréquence .....	— 3
1.1.3 Interprétation .....	— 3
1.1.4 Cadre général des transformations linéaires .....	— 3
1.1.5 Reconstruction .....	— 3
1.2 Atomes temps-échelle et familles d'ondelettes .....	— 4
1.2.1 Coefficient .....	— 4
1.2.2 Interprétation .....	— 5
1.2.3 Conditions .....	— 5
1.2.4 Normalisation .....	— 5
1.2.5 Reconstruction .....	— 5
1.3 Comparaison .....	— 6
1.3.1 Principe d'incertitude .....	— 6
1.3.2 Résolution spatio-fréquentielle .....	— 6
1.3.3 <i>Frame</i> et bases orthonormales.....	— 6
<b>2. Lois d'un signal</b> .....	— 7
2.1 Signal analytique .....	— 7
2.2 Arêtes et squelettes .....	— 7
2.2.1 Détermination des lois de modulation .....	— 8
2.2.2 Signature temps-fréquence .....	— 8
2.3 <i>Matching pursuit</i> .....	— 8
2.3.1 Groupe de Weyl-Heisenberg affine .....	— 9
2.3.2 Extension des analyses précédentes .....	— 9
2.3.3 Décomposition.....	— 9
<b>3. InterTO et interFFG</b> .....	— 10
3.1 Définition .....	— 10
3.2 Interprétation .....	— 11
<b>4. Conclusion</b> .....	— 11
<b>Références bibliographiques</b> .....	— 12

**L'**analyse de Fourier est un outil de base en traitement du signal, indispensable dans de nombreux domaines de la recherche, mais elle montre vite des limites justifiées dès lors que l'on sort du cadre rigoureux de sa définition : le domaine des signaux stationnaires d'énergie finie. Dans l'analyse de Fourier, tous les aspects temporels (début, fin, durée d'un événement), bien que présents

dans la phase, deviennent illisibles dans le spectre. En particulier, la transformée de Fourier (TF) d'un morceau de musique ne permet pas de retrouver le rythme joué, mais simplement les notes présentes. Le spectre seul ne permet pas de dissocier deux partitions différentes ayant les mêmes notes. Or, on souhaiterait pourtant parfois réaliser à la fois une analyse en temps et en fréquence, pour retrouver la « portée musicale » associée à ces **signaux non stationnaires**.

L'étude de signaux non stationnaires nécessite donc soit une extension de la TF (ou des méthodes stationnaires), en y introduisant un aspect temporel, soit le développement de méthodes spécifiques.

La première solution, mise en place intuitivement au milieu du siècle, correspond aux **analyses de Fourier à fenêtre glissante** (FFG) ou Fourier à court terme introduites dès 1945 par D. Gabor [1] avec l'idée d'un plan temps-fréquence où des modulations de fréquences seraient ainsi exprimées, et où le temps deviendrait un paramètre complémentaire de la fréquence. Ces méthodes montrent qu'une localisation exacte conjointe en temps et en fréquence est impossible, et introduisent l'idée d'une base discrète, minimale, traduisant en quelques coefficients la répartition d'énergie du signal dans le plan temps-fréquence ainsi mis en évidence. À ces approches s'est ajoutée la **transformée en ondelettes**, existant à l'état latent aussi bien en mathématiques qu'en traitement du signal, mais dont le véritable essor a commencé au début des années 1980.

Une deuxième approche possible consiste à considérer la densité d'énergie du signal comme une **distribution des deux variables temps et fréquence**. Cette décomposition bilinéaire, conjointe, introduite par J. Ville [2], a mis en relief le rôle central de la distribution de Wigner-Ville, puis a débouché sur les classes générales de Cohen affines, englobant les représentations temps-fréquence et précédemment citées [3][4].

Notations et symboles		
Symbole	Unité	Définition
$a$	s	échelle
$A_s(t)$		amplitude instantanée
$b$	s	position
$B$	Hz	largeur de bande
$C_{a,b}$		coefficient à l'instant $b$ et dilatation $a$
$C_s(b, \nu)$		coefficient à l'instant $b$ et à la fréquence $\nu$
$\mathbb{C}$		ensemble des complexes
$D$		dictionnaire issu de $\Gamma$ et de $g(t)$
$E_s$		densité d'énergie du signal
$\langle f, g \rangle$		produit scalaire
$\bar{g}(t)$		conjugué de $g(t)$
$g_\gamma(t)$		forme d'enveloppe
$G_{aWH}$		groupe de Weyl-Heisenberg affine
$\hat{G}(\nu)$		approximation du signal initial
$H$		transformée de Hilbert
$I$		intercorrélacion
$\text{Im}$		partie imaginaire
$L^2(\mathbb{R})$		ensemble des fonctions réelles de carré intégrable
$Q$		facteur de surtension
$\mathbb{R}$		ensemble des réels

Notations et symboles		
Symbole	Unité	Définition
$\text{Re}$		partie réelle
$R_s^n$		reste ou résidu de $s(t)$ à l'étape $n$
$\hat{S}(\nu)$		TF du signal initial $s(t)$
$s(t)$		signal
$t$	s	instant courant
$T$	s	intervalle de temps
$\nu, \xi$	Hz	fréquence
$\nu_s(t)$	Hz	fréquence instantanée
$z_s(t)$		signal analytique associé à $s(t)$
$\varepsilon$		erreur
$\lambda$		représentation canonique
$\sigma$		localisation énergétique
$\varphi_{b,\nu}$		atome temps-fréquence translaté en $b, \nu$
$\varphi_{a,b}(t)$		ondelette translatée en $b$ , dilatée de $a$
$\psi(t)$		ondelette mère
$\omega(t)$		fenêtre
$\Gamma$		famille de $\gamma$
$\Pi_{t_0, \tau}(t)$		porte de durée $T$ , centrée en $t_0$
*		produit de convolution

# 1. Décompositions linéaires continues

## 1.1 Fourier à fenêtre glissante

Pour réaliser une analyse spectrale *locale* d'un signal  $s(t)$  autour d'un instant arbitraire  $t_0$ , il faudrait calculer une transformée de Fourier (TF) du voisinage immédiat de ce point. L'intégrale de Fourier nécessitant un temps d'intégration infini, cela suppose que l'aspect local soit introduit en ne regardant le signal que dans un certain intervalle  $T$  proche de  $t_0$ , dans lequel on le considère comme stationnaire.

### 1.1.1 Spectre local

Cette démarche revient à tronquer  $s(t)$  en le segmentant sur une plage de temps finie  $[t_0 - T/2, t_0 + T/2]$ . Par définition, on ne calcule plus une intégrale de Fourier mais un **pseudo-spectre**, représentant une approximation  $\hat{G}(v)$  de  $\hat{S}(v)$ , obtenu comme produit de  $s(t)$  et d'une porte de largeur  $T$ , centrée sur la valeur  $t_0$  :  $\Pi_{t_0, T}$ .

Puisque le signal est multiplié par une fonction dans l'espace temporel, on le convolue dans le domaine spectral par la TF de cette dernière, soit ici un sinus cardinal (sinc). On calcule l'approximation  $\hat{G}(v)$  du spectre du signal  $\hat{S}(v)$ , tronqué autour de  $t_0$  :

$$\hat{G}(v) = \hat{S}(v) * \frac{\sin(\pi T v)}{\pi v} e^{-2i\pi v t_0} \quad (1)$$

Cette approximation sera d'autant meilleure que  $T$  sera grand (on retrouve alors une intégrale de Fourier), c'est-à-dire que le sinus cardinal tend vers un Dirac. Cela impose des calculs volumineux et une perte de l'aspect local de l'analyse.

L'inconvénient majeur du sinus cardinal est lié aux lobes importants qui parasitent la représentation et limitent la méthode. Intuitivement, la généralisation de cette démarche consiste à choisir une fonction  $\omega_{t_0, T}(t)$  de taille  $T$ , qui va tronquer  $s(t)$  autour de  $t_0$  qui remplacera la porte  $\Pi$  précédente et qui minimisera les effets évoqués ci-avant. Les spectres obtenus permettent de trouver les fréquences contenues dans la restriction du signal à la fenêtre  $\omega(t)$  autour d'un instant  $t_0$ .

### 1.1.2 Analyse temps-fréquence

En déplaçant la fonction d'analyse sur tous les instants  $b$  du signal, on obtient une collection de spectres locaux, dépendant de l'instant  $b$ , soit une famille de coefficients  $C_s(b, v)$  définis par :

$$C_s(b, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \overline{\omega(t-b)} e^{-2i\pi v t} dt \quad (2)$$

avec  $b$  le paramètre de position (instant  $t_0$  précédemment cité) permettant de déplacer l'analyse sur tout le signal,  
 $v$  la fréquence locale obtenue par ce spectre.

### 1.1.3 Interprétation

En appelant  $\varphi_{b, v}(t) = \omega(t-b)e^{2i\pi v t}$ , on retrouve le produit scalaire de  $L^2(\mathbb{R})$  de  $s(t)$  par les fonctions  $\varphi_{b, v}(t)$  :

$$C_s(b, v) = \langle s, \varphi_{b, v} \rangle \quad (3)$$

Ces coefficients s'interprètent alors comme une décomposition du signal sur une base de fonctions dépendant de deux paramètres, le temps et la fréquence, localisées autour de  $b$  et  $v$ . Ces fonctions sont obtenues à partir d'une fonction mère  $\varphi(t)$ , translatée en fréquence et en temps. Elles constituent les atomes  $\varphi_{b, v}(t)$  de base du plan temps-fréquence.

Le produit scalaire de  $L^2(\mathbb{R})$ , si  $s(t)$  est réel, peut s'écrire comme la corrélation entre  $s(t)$  et  $\varphi_{b, v}(t)$ . Le coefficient calculé mesure alors la ressemblance locale entre le signal et l'atome temps-fréquence associé au couple  $(b, v)$ . Plus ce coefficient est grand, plus le signal s'apparente à  $\varphi_{b, v}(t)$ .

Il est clair qu'une version duale, obtenue à partir des spectres de  $s(t)$  et  $\varphi_{b, v}(t)$  existe et permet de calculer les mêmes coefficients par :

$$C_s(b, v) = \langle \hat{S}, \hat{\varphi}_{b, v} \rangle \quad (4)$$

Ceux-ci s'interprètent comme la sortie d'un ensemble de filtres passe-bande  $\omega(\xi)$ , de fréquence centrale  $v$  variant continûment.

Si ces filtres ont un gain unité, ils donnent directement l'amplitude des phénomènes présents à la fréquence  $v$ , et permettent alors de définir la modulation d'amplitude du signal.

Ces coefficients peuvent aussi se ramener à une densité d'énergie  $E_s$  du signal, si on en prend cette fois-ci le module carré. La représentation obtenue s'appelle alors :

— **spectrogramme** si elle est définie par :

$$E_s(b, v) = \left| \int_{\mathbb{R}} s(t) \overline{\omega(t-b)} e^{-2i\pi b \xi} dt \right|^2 \quad (5)$$

— **sonagramme** si elle vaut :

$$E_s(b, v) = \left| \int_{\mathbb{R}} \hat{S}(\xi) \overline{\hat{\omega}(\xi-v)} e^{2i\pi b \xi} d\xi \right|^2 \quad (6)$$

### 1.1.4 Cadre général des transformations linéaires

La décomposition d'un signal  $s(t)$  de  $L^2(\mathbb{R})$  sur une famille d'atomes temps-fréquence  $\varphi_{b, v}(t)$ , obtenue :

— par translation temporelle  $b$  d'une fenêtre  $\omega(t)$  :

$$\varphi_b(t) = \omega(t-b)$$

— par translation fréquentielle  $v$  :

$$\varphi_v(t) = \omega(t) e^{2i\pi v t}$$

se calcule par :

$$C_s(b, v) = \langle s, \varphi_{b, v} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \overline{\omega(t-b)} e^{-2i\pi v t} dt \quad (7)$$

Elle correspond à une restriction locale autour de  $b$  d'un signal  $s(t)$  par une fenêtre d'analyse  $\omega(t)$  puis à son analyse spectrale.

### 1.1.5 Reconstruction

Le groupe de Weyl-Heisenberg des translations et modulations offre un cadre mathématique rigoureux pour les transformations de type Fourier à fenêtre glissante (FFG). Il permet une reconstruction du signal et une conservation de l'énergie. La condition de fermeture (résolution de l'identité) de ce groupe des translations temporelles et fréquentielles impose comme contrainte sur les atomes de base :

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)|^2 dt < \infty \quad (8)$$

soit, une fois renormalisés :

$$\int_{\mathbb{R}} |\omega(t)|^2 dt = 1 \tag{9}$$

Sous réserve de ces conditions,  $s(t)$  peut s'écrire :

$$s(t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} C_s(b, \nu) \varphi_{b, \nu}(t) db d\nu \tag{10}$$

Cela revient à considérer les atomes  $\varphi_{b, \nu}(t)$  comme une base de  $L^2(\mathbb{R})$  et les coefficients comme les coordonnées du signal dans ce plan (on retrouve là la définition d'une décomposition en atomes).

Le groupe de Weyl-Heisenberg admet une infinité de bases, ce qui suppose que l'on puisse trouver une décomposition et/ou une reconstruction de  $s(t)$  sur deux familles différentes  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$ . On peut ainsi écrire :

$$s(t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} C_s^{\varphi_1}(b, \nu) \varphi_2^{b, \nu}(t) db d\nu \tag{11}$$

## 1.2 Atomes temps-échelle et familles d'ondelettes

Les éléments de base de la transformée en ondelettes sont des fonctions localisées en temps autour d'un paramètre  $b$  et oscillant à une fréquence  $\nu = 1/a$ . Elles sont générées par translation  $b$  et dilatation  $a$  à partir d'une seule fonction, l'ondelette mère  $\psi(t)$ , de **moyenne nulle**, comme suit :

$$\psi_{a, b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \tag{12}$$

Si  $a < 1$ , l'ondelette est contractée. Elle s'adapte alors aux discontinuités du signal (phénomènes de petites tailles) et donc aux hautes fréquences.

Si  $a > 1$ , l'ondelette est dilatée. Elle analyse les grandes échelles (basses fréquences).

Par rapport aux transformées de FFG, le nombre d'oscillations est ici fixé dans la fenêtre d'analyse dont la taille varie grâce au facteur  $a$ . L'idée de base consiste donc à « jouer de l'accordéon » avec l'ondelette mère  $\psi(t)$  pour lui faire prendre toutes les tailles (et donc échelles) possibles, à chaque instant (figure 1).

### 1.2.1 Coefficient

On définit le coefficient d'ondelette au point  $b$ , à l'échelle  $a$ , comme le produit scalaire du signal  $s(t)$  et de la fonction  $\psi_{a, b}(t)$  par :

$$C_{a, b} = \langle s, \psi_{a, b} \rangle \tag{13}$$

soit :

$$C_{a, b} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \tag{14}$$

Lorsque le signal oscille à la même fréquence que l'ondelette, le produit scalaire entre les deux signaux – représentant leur « corrélation » – devient maximal, le coefficient est grand. Au contraire, si les deux échelles sont différentes, on calcule le produit d'une fonction de moyenne nulle par une fonction presque constante, le coefficient est donc voisin de zéro [7][19].

Les coefficients  $C_{a, b}$  peuvent aussi se retrouver par :

$$C_{a, b} = \langle \hat{S}, \hat{\psi}_{a, b} \rangle \tag{15}$$

Cela fournit une version duale de l'équation précédente par :

$$C_{a, b} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{S}(\xi) \hat{\psi}(a\xi) e^{2i\pi b\xi} d\xi \tag{16}$$

### Historique

La transformée en ondelettes est apparue dans les années 1980 avec les travaux de l'ingénieur J. Morlet [5] sur des **signaux sismiques**. Les outils et méthodes classiques d'analyse de Fourier s'étaient montrés inadaptés ; ceux issus de FFG et de Gabor étaient inadéquats car ils n'assuraient pas une résolution suffisante pour ces signaux. Indépendamment des travaux de A. Calderon [6] effectués en mathématiques dans les années 1960, il présente en 1983 un algorithme d'analyse et de synthèse par **ondelettes** qui autorise l'analyse de signaux où cohabitent des phénomènes d'échelles très différentes. En collaboration avec A. Grossmann, physicien du Centre de physique théorique de Marseille, il développe les bases de la **transformée en ondelettes continues 1D**, reposant sur la représentation de carré intégrable du groupe affine  $ax + b$  (groupe de translations et dilatations)[7].

En 1985, Y. Meyer, lisant les travaux de Morlet et Grossmann, reconnaît l'identité de Calderon derrière la condition d'admissibilité, puis découvre une **base orthogonale d'ondelettes**, construite à partir d'une ondelette régulière [8]. En 1987, il introduit avec S. Mallat l'analyse multirésolution (décomposition en détails et approximations du signal) et rejoint la théorie des filtres miroirs en quadratique [9][10][11].

Les applications se diversifient pour toucher la mécanique des fluides, la turbulence [12], les fractales, la résolution d'équations aux dérivées partielles [7][13].

En 1990, les travaux de R. Murenzi étendent la théorie continue aux **dimensions 2 puis N quelconque**, en introduisant un opérateur supplémentaire : la rotation. Il ouvre la porte au **traitement d'images** par ondelettes [14]. Mallat effectue la même extension avec l'analyse multirésolution [9], qui autorise la **compression d'images** par ondelettes.

Depuis lors, les extensions sont nombreuses et touchent des branches très diverses comme l'astronomie [15], l'holographie acoustique [16], l'analyse d'écoulements turbulents par visualisations [17] et autres [18].

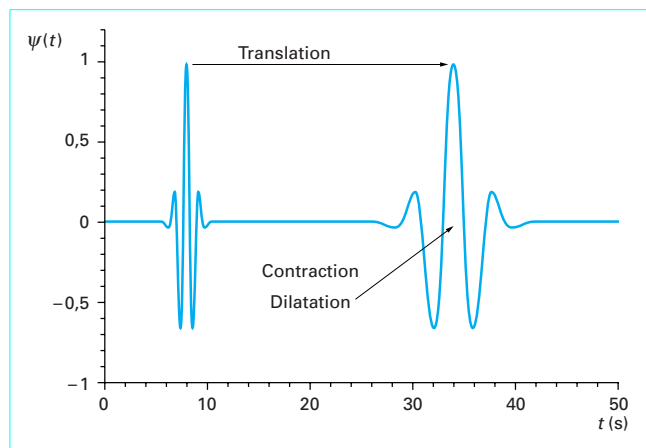


Figure 1 – Translation et changement de taille de l'ondelette mère  $\psi(t)$

### 1.2.2 Interprétation

Dans le domaine spectral, une ondelette se comporte comme un filtre passe-bande de fréquence centrale  $\nu_0/a$  liée au nombre d'oscillations de l'ondelette mère  $\psi(t)$  [20][21][22] et de largeur de bande relative constante.

L'équation (16) permet donc d'interpréter la transformée en ondelettes comme la sortie d'une série de filtres passe-bande de précision relative  $\Delta\nu/\nu$  constante, de fréquence centrale  $\nu_0/a$  variant continûment sur toutes les fréquences d'analyse. La densité d'énergie du signal se retrouve en prenant le module au carré des coefficients, que l'on nomme **scalogramme** et que l'on peut facilement rapprocher du sonagramme obtenu par FFG (§ 1.1.3). Les caractéristiques des filtres  $\omega(\nu)$  et  $\psi(\nu)$  différencient les deux représentations.

Cette remarque permet de considérer la décomposition en ondelettes comme une véritable **analyse temps-fréquence**, bien qu'à l'origine, on manipule un paramètre d'échelle. Cette interprétation, en terme de banc de filtres de largeur de bande relative constante, se ramène à l'analyse par des filtres à facteur de surtension  $Q$  constant.  $Q$  (aussi appelé facteur de qualité) est défini comme le rapport entre la fréquence centrale du filtre  $\nu_0$  et sa largeur de bande  $B$  :

$$Q = \nu_0/B \tag{17}$$

### 1.2.3 Conditions

Les conditions imposées à une fonction pour être une ondelette mère sont peu restrictives ; il suffit en fait qu'elle vérifie la condition d'admissibilité :

$$C_\psi = \int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(\xi)|^2 \frac{d\xi}{|\xi|} < \infty \tag{18}$$

Pour les fonctions de  $L^2(\mathbb{R})$ , elle impose alors simplement que  $\psi(t)$  soit de moyenne nulle.

**Nota :** les ondelettes  $\psi(t)$  sont en général complexes et donnent donc un signal complexe lors de la recombinaison. Le module caractérise l'amplitude locale du signal analytique associé. Il suffit de prendre la partie réelle du coefficient pour retrouver le signal physique initial.

On peut imposer en outre des conditions de régularité telles que des moments d'ordres multiples nuls, et donc des propriétés de décroissance et convergence vers zéro à l'infini pour  $\psi(t)$  et  $\psi(\nu)$ , afin d'améliorer leur localisation.

#### Exemples d'ondelettes :

- Chapeau mexicain (figure 2a) :

$$\text{Partie réelle : } \psi(t) = (1 - t^2)e^{-t^2/2} \tag{19}$$

- Ondelette de Morlet (figure 2b) :

$$\psi(t) = e^{i\omega_0 t} e^{-t^2/2} \tag{20}$$

- Ondelette de Haar (figure 2c) :

$$1 \text{ si } 0 \leq t < 1/2, -1 \text{ si } 1/2 \leq t < 1 \text{ sinon} \tag{21}$$

**Nota :** les ondelettes à enveloppe gaussienne, comme les ondelettes de Morlet, ne vérifient pas la condition d'admissibilité. La TF d'une gaussienne modulée à une fréquence  $\nu_0$  par une fonction oscillante est une gaussienne centrée sur  $\nu_0$  dans l'espace des fréquences, et donc toujours strictement positive. Numériquement toutefois, on peut les considérer comme nulles en dessous d'une valeur minimale ou ajouter un terme correctif pour vérifier la condition d'admissibilité.

### 1.2.4 Normalisation

Le facteur  $1/\sqrt{a}$  de la décomposition en ondelettes (12), qui assure une normalisation  $L^2$ , permet de retrouver une densité d'énergie (scalogramme) dans le plan temps-fréquence.

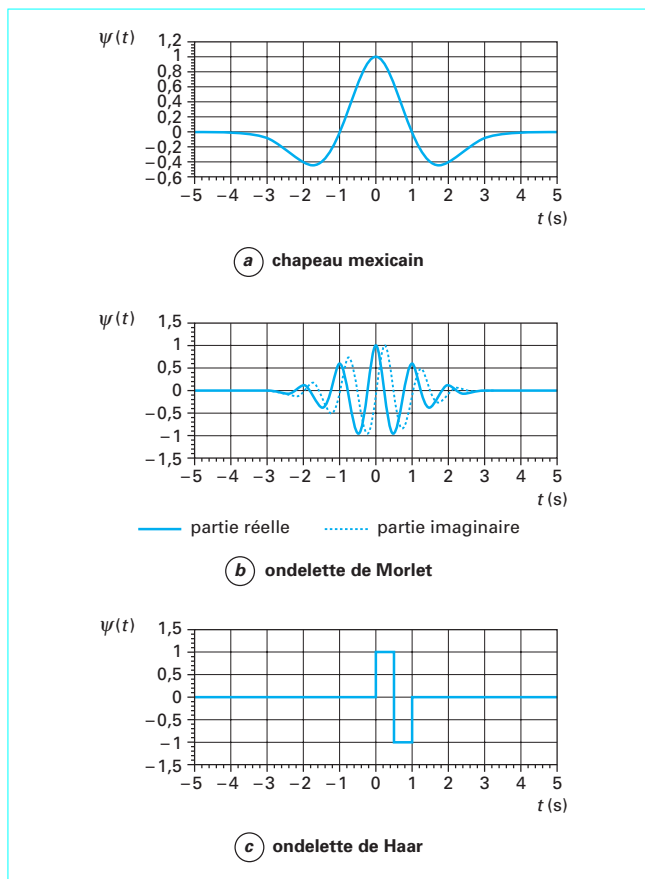


Figure 2 – Exemples d'ondelettes

Dans l'espace de Fourier, les fonctions  $\psi_{a,b}(\nu)$  sont des filtres passe-bande de surface, et donc d'énergie constante (figure 3). Les filtres se déduisent d'un gabarit de base par homothétie. La normalisation  $L^1$  est de gain constant égal à 1 pour toutes les fréquences centrales. La normalisation  $L^2$  impose une surface constante aux filtres, les maxima (et donc le gain du filtre) suivent une loi en  $1/\sqrt{\nu}$ .

Si on s'intéresse maintenant aux amplitudes des composantes, il convient de choisir une normalisation  $L^1$ , pour laquelle les ondelettes sont définies par :

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{a} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \tag{22}$$

Celles-ci deviennent des filtres dans l'espace des fréquences, toujours obtenus par dilatation ou compression (d'échelle  $a$ ), mais de gain unité constant quelle que soit la fréquence scrutée (figure 3). L'énergie des ondelettes varie avec la fréquence centrale  $\nu_0/a$ . Le principe d'incertitude est respecté de la même manière, avec une résolution  $\Delta\nu/\nu$  constante.

Cette normalisation est nécessaire lorsque l'on s'intéresse aux lois de modulation ou aux amplitudes caractéristiques des phénomènes.

### 1.2.5 Reconstruction

L'analyse par ondelettes peut s'interpréter en théorie des groupes, par le fait que la représentation canonique du groupe affine des dilatations translations  $ax + b$  est de carré intégrable. Elle autorise,

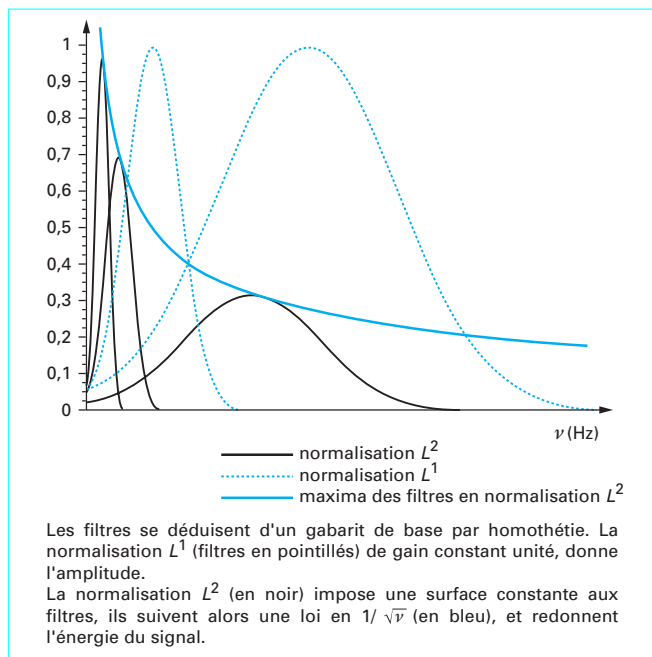


Figure 3 – Normalisation et banc de filtres à Q constant

sous réserve de remplir la condition d'admissibilité (18), une reconstruction du signal et la conservation de l'énergie par :

$$s(t) = \frac{1}{C} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{**}} C_{a,b} \cdot \psi_{a,b}(t) \frac{dadb}{a^2} \quad (23)$$

Il est intéressant de noter que, comme le groupe Weyl-Heisenberg, la base de recombinaison n'est pas obligatoirement celle initialement choisie pour analyser. La formule de reconstruction mixte s'écrit :

$$s(t) = \frac{1}{C_{\psi_1 \psi_2}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{**}} \langle s(t), \psi_1\left(\frac{t-b}{a}\right) \rangle \frac{1}{\sqrt{a}} \psi_2\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{dadb}{a^2} \quad (24)$$

Cela conduit à une formule de reconstruction rapide, utilisant par exemple une base de Dirac, employée par Morlet de manière empirique et démontrée par la suite dans [7][14].

### 1.3 Comparaison

#### 1.3.1 Principe d'incertitude

La localisation d'un signal en temps et en fréquence ne peut se faire sur des supports infiniment réduits. En particulier, plus on accroît la précision en fréquence de l'analyse, plus on perd de localisation temporelle, et donc de précision en temps [1], et réciproquement [23][24][25].

Il existe une relation, le *principe d'incertitude*, liant la variance de l'encombrement spectral d'un signal à celle de sa durée, définissant une surface minimale de résolution en chaque point du plan temps-fréquence.

Soit :

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{E_s} \int_{\mathbb{R}} t^2 |s(t)|^2 dt \quad (25)$$

$$\sigma_\nu^2 = \frac{1}{E_s} \int_{\mathbb{R}} \nu^2 |\hat{S}(\nu)|^2 d\nu \quad (26)$$

$E_s$  représente l'énergie du signal (et donc du spectre). On a l'inégalité suivante :

$$\sigma_t \cdot \sigma_\nu \geq 1/4\pi \quad (27)$$

**Nota :** cette relation est semblable à celle connue en mécanique quantique sous le nom de *principe d'incertitude d'Heisenberg* dont s'est inspiré Gabor pour le principe et la démonstration. C'est aussi cette analogie qui lui a donné son nom.

#### 1.3.2 Résolution spatio-fréquentielle

La qualité principale d'une représentation en temps et fréquence est de mieux visualiser le contenu d'un signal, par rapport à une représentation temporelle seule ou fréquentielle seule, bien que la même information y soit contenue. En particulier, l'introduction du temps dans les spectres n'entraîne pas un gain de précision, et au contraire suppose que l'on garde une certaine incertitude quant à la localisation exacte des composantes du signal dans le plan temps-fréquence, liée au principe d'incertitude.

Dans l'analyse de Fourier, les fonctions d'analyse sont des sinusoïdes de durée infinie, concentrées en fréquence (Dirac dans l'espace des fréquences). Elles n'ont aucune localisation temporelle, seul l'aspect fréquentiel est accessible. Dans l'analyse par FFG et Gabor, les informations sont réparties en temps et en fréquence, grâce à la localisation des fonctions  $\omega(t)$  et  $\hat{\omega}(\nu)$ . La taille constante de la fenêtre fixe la largeur de bande du filtre équivalent dans l'espace des fréquences et donc la résolution fréquentielle de l'analyse. Le principe d'incertitude impose ensuite leur précision temporelle. Quels que soient les fréquences ou instants scrutés, la précision de notre outil demeure constante, les basses et hautes fréquences sont vues de la même manière.

Les ondelettes adaptent leur précision relative aux tailles scrutées, tout en gardant cette double localisation temps-fréquence. La variation de l'échelle par dilatation fait qu'elles analysent le signal à  $\Delta\nu/\nu$  constant [19][22][26]. Aux **hautes fréquences**, la précision en temps est accrue ; ce cas correspond souvent à des phénomènes brefs, pour lesquels l'instant d'apparition et la durée sont des caractéristiques importantes. Aux **basses fréquences**, la précision fréquentielle s'améliore au détriment de l'aspect temporel, puisque les phénomènes sont de durée beaucoup plus longue. Ces résultats sont regroupés sur la figure 4.

Pour l'**analyse de Fourier**,  $\Delta\nu$  est fixé à l'échantillonnage,  $\Delta t$  est égal à la durée du signal (aucune localisation temporelle). Pour l'**analyse de Gabor**, les valeurs de  $\Delta t$  et  $\Delta\nu$  sont constantes, imposées par la taille de la fenêtre. Pour les **ondelettes**, ces valeurs évoluent suivant les fréquences en gardant Q constant. La surface  $\Delta t \Delta\nu$  est limitée à  $1/4\pi$  par le principe d'incertitude.

Les ondelettes sont ainsi plus avantageuses dans l'analyse de signaux où les hautes fréquences sont caractérisées par des durées courtes, grâce à l'effet zoom qu'elles effectuent. Elles sont très utilisées en acoustique car elles offrent une décomposition logarithmique en fréquence (Q constant) comme notre perception auditive dans une large gamme de fréquences. Elles se retrouvent aussi en turbulence, où la notion d'échelle est très importante.

#### 1.3.3 Frame et bases orthonormales

Il est possible de choisir une sous-famille d'ondelettes discontinue et discrète, appelée *frame* [27][28], discrétisant le couple (a, b) en :

$$a_m = \alpha^{-m}, b_n = \beta n a_m, (m, n) \in \mathbb{Z}^2, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha > 1, \beta > 0 \quad (28)$$

La famille d'ondelettes devient :

$$\psi_{m,n}(t) = \alpha^{m/2} \psi(\alpha^m t - n\beta) \quad (29)$$

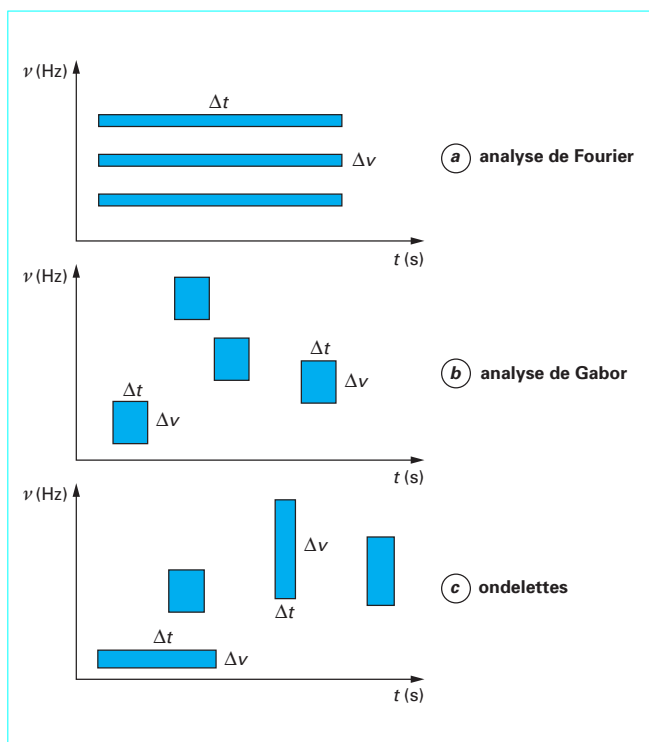


Figure 4 – Comparaison entre les différentes décompositions

( $\alpha$ ,  $\beta$ ) caractérise la richesse du réseau de discrétisation. En particulier, si  $\alpha$  tend vers 1 et  $\beta$  vers 0, on retrouve le cas continu. Si  $\alpha$  vaut 2, on retrouve les octaves de musique. Ce genre de décomposition avait été utilisé par Morlet de manière empirique.

Les ondelettes autorisent les familles  $\varphi_{n,m}(t)$  à être de bons atomes temps-échelle, bien localisés à la fois en temps et en fréquence, pour des densités de maillage faibles. Une comparaison entre les structures obliques issues d'une analyse de Gabor et d'ondelettes est décrite dans [28]. On y trouve une étude quantitative sur la détermination des erreurs et des taux de convergence en fonction de la densité du maillage.

Il est même possible de trouver des bases orthonormales, échantillonnées de manière minimale sur un réseau dyadique et bien localisées, qui autorisent des implémentations informatiques extrêmement rapides.

## 2. Lois d'un signal

La détermination des lois d'un signal (modulations d'amplitude et de fréquence) est un problème que l'on cherche à résoudre dans de nombreux domaines (acoustique, détecteurs radar et sonar, etc.). Les méthodes temps-fréquence évoquées (décompositions atomiques ou distributions d'énergie) admettent toutes les méthodologies permettant de retrouver une approximation de ces modulations. Les distributions d'énergie trouvent naturellement là un champ d'application privilégié. Nous définissons ici un équivalent pour les algorithmes liés aux décompositions atomiques, en utilisant comme outil de base l'analyse par ondelettes. La transposition au cas des FFG est immédiate et donne des résultats semblables.

## 2.1 Signal analytique

Par analogie avec le formalisme de la mécanique quantique, D. Gabor puis J. Ville [2] décident de ne manipuler, comme signal ou fonction d'analyse, que des grandeurs complexes, l'introduction de l'exponentielle permettant de simplifier le problème et les opérations. Le signal analytique  $z_s(t)$ , complexe, ainsi mis en avant, se déduit de  $s(t)$  par :

$$\text{Re}[z_s(t)] = s(t) \quad (30)$$

Cette extension est obtenue simplement à l'aide de :

$$z_s(t) = s(t) + iH[s(t)] = a_s(t)e^{i\varphi_s(t)} \quad (31)$$

avec  $H[s(t)]$  la transformée de Hilbert de  $s(t)$ , c'est-à-dire à la mise en quadrature (avance de phase de  $\pi/2$ ) du signal  $s(t)$ .

Dans l'espace de Fourier,  $z_s(t)$  devient :

$$\hat{Z}_s(\nu) = 2\hat{S}(\nu) \text{ si } \nu \geq 0, \hat{Z}_s(\nu) = 0 \text{ sinon} \quad (32)$$

$\hat{Z}_s(\nu)$  est obtenue par suppression des fréquences négatives de  $s(t)$  et multiplication par 2 des amplitudes de la partie positive du spectre. Cette opération s'effectue par la multiplication du spectre de  $s(t)$  par un échelon de Heaviside de gain 2.

On calcule ensuite l'amplitude locale par :

$$a_s(t) = |z_s(t)| \quad (33)$$

et la fréquence instantanée par :

$$\nu_s(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \varphi_s(t)}{\partial t} \quad (34)$$

**Nota :** la troncature des fréquences négatives n'altère pas le contenu d'un signal réel, dont le spectre est symétrique.

## 2.2 Arêtes et squelettes

La transformée en ondelettes (TO) associe à un signal  $s(t)$  mono-dimensionnel un demi-plan où l'information est redondante. Il paraît donc naturel de rechercher les points les plus significatifs, c'est-à-dire les trajectoires où la décomposition représente au mieux le signal. La démarche naturellement adoptée pour les méthodes temps-fréquence consiste à utiliser les points où l'énergie est maximale (ligne de crête) [29].

Le choix d'une représentation par scalogramme, en module et phase, amène à s'intéresser à la validité de la densité d'énergie en tant qu'outil d'estimation des caractéristiques instantanées du signal. Ainsi, l'analyse de deux sinusoides de fréquences voisines introduit des perturbations plus ou moins perceptibles liées à l'interaction entre composantes. Il s'ensuit une erreur dans l'estimation des diverses lois du signal en n'utilisant que le module. Par contre, ces phénomènes ne perturbent pas la phase de la transformée qui devient un meilleur estimateur des modulations de fréquence [20][30][31].

L'**arête** est l'ensemble des points particuliers  $\tau(a)$  où la fréquence instantanée de l'ondelette coïncide avec celle locales de la phase de la transformée. Elle représente la modulation de fréquence du signal. Le **squelette** est la restriction des transformées (TO, FFG) à l'arête, c'est un estimateur de la modulation d'amplitude du signal.

L'ondelette utilisée pour la suite se caractérise par une fréquence centrale  $\nu_0$ , permettant de considérer la transformée et les coefficients comme une décomposition temps-fréquence. Elle est en outre progressive. La phase de la transformée à l'échelle  $a$ , et au point  $b$  est notée  $\varphi_a^{\text{TO}}(b)$ .

### 2.2.1 Détermination des lois de modulation

Dans cette partie, on suppose que le signal  $s(t)$  contient une modulation de fréquence  $\nu_s(t)$  et d'amplitude  $A_s(t)$ .

Le signal analytique  $z_s(t)$  associé à  $s(t)$  s'écrit sous forme complexe :

$$z_s(t) = A_s(t)e^{i\varphi_s(t)} \tag{35}$$

$s(t)$  est supposé asymptotique, c'est-à-dire que la fréquence est supposée varier lentement par rapport à la phase :

$$\left| \frac{d\varphi_s(t)}{dt} \right| \gg \left| \frac{1}{A_s(t)} \frac{dA_s(t)}{dt} \right| \tag{36}$$

■ **Signal ne contenant qu'une fréquence**

$$s(t) = A_s(t) \sin[2\pi\nu_s(t) + \varphi_s] \tag{37}$$

$$z_s(t) = |A_s(t)| e^{i(2\pi\nu_s(t) + \varphi_s - \frac{\pi}{2})} \tag{38}$$

Le critère de stationnarité de la phase permettant de retrouver les points  $\tau(a)$  est défini par [30] :

$$\frac{\partial \varphi_s(t)}{\partial t} = \nu_s = \frac{\nu_0}{a} \tag{39}$$

On cherche donc les trajectoires telles que :

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \varphi_a^{\text{TO}}(b)}{\partial b} = \nu_a(b) = \frac{\nu_0}{a} \tag{40}$$

L'algorithme de recherche de l'arête est le suivant. À un instant  $k$ , on itère :

$$a[i+1](k) = \frac{\nu_0}{\partial \varphi_{a[i](k)}^{\text{TO}} / 2\pi \partial b} \tag{41}$$

tant que la condition suivante n'est pas remplie :

$$\frac{a[i+1](k)}{a[i](k)} < 1 + \varepsilon \tag{42}$$

avec  $a[i+1]$  l'échelle correspondant à la fréquence instantanée évaluée en  $a[i]$ ,  
 $\varepsilon$  la précision que l'on se fixe sur l'échelle (et donc la fréquence).

Une fois trouvée l'échelle  $a[\infty](k)$ , et donc la composante  $\nu_s(k)$ , on passe à la position suivante  $k+1$ , en posant :

$$a[0](k+1) = a[\infty](k) \tag{43}$$

L'algorithme suit le squelette car on l'oblige à rester sur la même loi de modulation (il ne peut changer d'arête en cours de route), l'hypothèse d'asymptotisme (36) renforçant par ailleurs ce choix.

En pratique, la convergence de l'algorithme vers un point fixe s'effectue en quelques itérations (convergence de type exponentiel) [30][31]. La démonstration se fait au moyen de considérations topologiques.

■ **Signal à N composantes**

$$s(t) = \sum A_k(t) \sin[2\pi\nu_k(t) + \varphi_k] \tag{44}$$

On détermine les diverses composantes une par une, en recherchant l'arête de chaque fréquence séparément, avec le critère de stationnarité (40). Comme pour l'estimation des lignes spectrales, on peut :

- soit répartir à chaque nouvelle étape à une échelle  $a[0](k)$  proche de la fréquence  $\nu_k$  recherchée. Une estimation en est donnée par le module ;
- soit soustraire la composante précédemment trouvée et réitérer l'algorithme (41) à (43).

On considère ici une évolution locale de la fréquence instantanée de la phase (dérivée par rapport à la position) au lieu d'une moyenne globale sur un temps  $T$ .

### 2.2.2 Signature temps-fréquence

L'algorithme précédent donne de manière itérative les fréquences et amplitudes d'un signal. Pour avoir l'aspect qualitatif et quantitatif d'un signal sans les interactions entre composantes liées au module, il est possible d'utiliser directement une TO en norme  $L^1$  et de la restreindre à la signature temps-fréquence du signal, constituée en une mesure de l'existence d'une loi de modulation en chaque point, pondérée par l'amplitude de la TO.

À une fréquence  $\nu$  et un instant  $b$  donnés, la dérivée de la phase de la TO fournit la fréquence instantanée locale  $\nu_1(b)$  :

- si  $\nu$  et  $\nu_1$  sont identiques, le point scruté se trouve sur l'arête du signal, l'amplitude de la TO correspond à la loi de modulation de la composante du signal ;
- si  $\nu$  et  $\nu_1$  sont différents, le point n'appartient pas à l'arête, le coefficient est mis à zéro.

La représentation obtenue correspond bien alors à une TO restreinte aux lois de modulation d'amplitude du signal, le long des lois de modulation de fréquence.

#### Conclusion

Les lois d'un signal fournissent une approximation plus ou moins fiable de la fréquence instantanée, suivant leur vitesse d'évolution. L'estimation de l'amplitude se fait à l'aide du module de la transformée et peut être biaisée par une variation trop rapide de sa valeur instantanée ou pour des interactions entre composantes.

Le croisement entre les lignes spectrales entraîne la « perte » d'une des lois suivies. Il est possible de faire redémarrer l'algorithme à l'aide, par exemple, d'une information supplémentaire issue du module. La signature temps-fréquence du signal a été développée pour pallier ces phénomènes et utiliser une convergence vers les lois de modulation autres que celles de l'arête.

### 2.3 Matching pursuit

L'analyse de FFG comporte des limitations dès lors que la taille de la fenêtre d'analyse est fixée. La détermination de phénomènes d'échelles très différentes est alors impossible à l'aide d'une seule analyse du signal. On aimerait jouer sur la taille de la fenêtre, de manière locale, pour l'adapter à toutes les parties du signal.

De même pour les ondelettes, le fait d'avoir une valeur de  $Q$  globale se traduit dans le plan temps-fréquence par des valeurs de  $\Delta t$  et  $\Delta \nu$ , donnant un rectangle de surface identique pour chaque ondelette mère  $\psi(t)$ , mais de taille différente (figure 4).

On aimerait introduire un troisième paramètre de contrôle qui permettrait de jouer sur l'échelle dans le cas de la FFG, sur le facteur de surtension  $Q$  dans le cas des ondelettes, pour obtenir une précision optimale, variable et locale dans le plan temps-fréquence. Le but est d'adapter les dimensions de la surface traduisant le principe d'incertitude, afin de déterminer la meilleure « boîte » locale, en termes d'encombrement, de dimensions, voire de forme.



### 2.3.1 Groupe de Weyl-Heisenberg affine

L'extension intuitive mise en avant correspond à l'analyse de signaux dans un groupe étendu : celui des ondelettes  $ax + b$  augmenté des modulations ou celui des FFG Weyl-Heisenberg étendu d'un paramètre de dilatation. Ces « nouveaux » ensembles correspondent au groupe de Weyl-Heisenberg affine  $G_{aWH}$  de représentation canonique  $\lambda$  [32].

Malheureusement,  $\lambda$  n'est pas de carré intégrable. En particulier, l'extension de la condition d'admissibilité (18) diverge, ce qui revient à dire qu'une décomposition linéaire stable, assurant la reconstruction du signal et une conservation de l'énergie n'est pas possible sur  $G_{aWH}$ .

### 2.3.2 Extension des analyses précédentes

Bien qu'une décomposition linéaire sur  $G_{aWH}$  semble impossible, une transformation sur les trois paramètres, temps, fréquence, échelle paraît avantageuse, car elle doit permettre de retrouver de façon optimale toutes les composantes, aussi diverses soient-elles, d'un signal.

Il est possible d'étendre simplement, à l'aide du paramètre  $Q$  des ondelettes, les analyses mises en œuvre pour se ramener à une représentation du groupe de Weyl-Heisenberg affine. Si ce paramètre varie localement, il est impératif d'utiliser une *décomposition non linéaire*, qui va extraire les composantes une à une, pour restreindre le groupe d'atomes à un sous-ensemble représentatif ; il convient donc de déterminer un critère de choix pour sélectionner les meilleurs atomes de décomposition et favoriser l'utilisation de cette transformation.

### 2.3.3 Décomposition

L'algorithme du *matching pursuit* réalise une décomposition non linéaire sur une famille d'atomes appartenant à un dictionnaire  $D$ , s'adaptant localement à la fréquence, l'échelle et la position des composantes recherchées. Bien que non orthogonale, elle permet une conservation de l'énergie du signal et un contrôle de la convergence de l'algorithme [33][34].

#### 2.3.3.1 Dictionnaire de fonctions

Une famille  $\Gamma$  d'éléments temps-fréquence-échelle de décomposition peut être définie par translation  $b$ , dilatation  $a$  et modulation  $\xi$  d'une fonction de forme  $g(t)$  (appelée *enveloppe* dans la suite) réelle, paire, d'énergie unité, de  $L^2\mathbb{R}$ . Cette famille se déduit de l'enveloppe par :

$$g_\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} g\left(\frac{t-b}{a}\right) e^{2i\pi\xi t} \tag{45}$$

$$\hat{g}_\gamma(v) = \sqrt{a} g[a(v-\xi)] e^{2i\pi(v-\xi)b} \tag{46}$$

$$\Gamma = \{\gamma = \{b, \xi, a\} \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{+*}\} \tag{47}$$

$g_\gamma(t)$  est ainsi :

- centrée autour de l'instant  $b$  ;
- centrée autour de la fréquence  $\xi$  ;
- de taille proportionnelle à  $a$ .

Sa localisation énergétique dans le plan temps-fréquence se calcule ainsi :

$$\begin{cases} \sigma_{t,a}^2 = \int_{\mathbb{R}} (t-b)^2 |g_\gamma(t)|^2 dt = a^2 \int_{\mathbb{R}} t^2 |g(t)|^2 dt \\ \sigma_{v,a}^2 = \int_{\mathbb{R}} (t-\xi)^2 |\hat{g}_\gamma(\xi)|^2 dv = \frac{1}{a^2} \int_{\mathbb{R}} v^2 |\hat{g}(v)|^2 dv \end{cases} \tag{48}$$

L'énergie est ainsi essentiellement concentrée :

- autour de  $b$  dans une plage de temps proportionnelle à  $a$  ;
- autour de  $\xi$  dans une plage proportionnelle à  $1/a$ .

La localisation conjointe est indépendante de l'échelle  $a$  et reliée au principe d'incertitude par :

$$\sigma_{v,s}^2 \cdot \sigma_{t,s}^2 \geq 1/4\pi \tag{49}$$

Cette famille de fonctions définit alors un **dictionnaire**  $D$ , redondant :

$$D = \{g_\gamma(t), \gamma = \{b, \xi, a\}\}_{\{\gamma \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{+*}\}} \tag{50}$$

Il comprend des éléments allant des atomes de Fourier (exponentielles complexes) aux Dirac, en prenant tous les intermédiaires temps-fréquence possibles.

#### 2.3.3.2 Décomposition d'un signal

Une fois le dictionnaire  $D$  défini, on cherche à décomposer un signal  $s(t)$  sur cette famille de fonctions et donc à trouver les coefficients  $a_n$  tels que :

$$s(t) = \sum_{n=0 \rightarrow \infty} a_n g_{\gamma_n}(t) \tag{51}$$

La décomposition doit alors donner une description simple et claire du signal, avec un nombre minimal de composantes. Pour calculer ces coefficients, on projette par itération le signal  $s(t)$  sur  $D$ .

■ En première approximation, on cherche l'élément  $g_{\gamma_0}(t)$  qui « ressemble » le plus au signal. Cela revient à calculer tous les produits scalaires :

$$\langle s, g_\gamma \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \overline{g_\gamma(t)} dt \tag{52}$$

et à prendre :

$$a_0 = \text{Sup}_{\{\gamma \in \Gamma\}} |\langle s, g_\gamma \rangle| = \langle s, g_{\gamma_0} \rangle \tag{53}$$

Il s'ensuit que :

$$s(t) = a_0 g_{\gamma_0}(t) + R^0 s(t) \tag{54}$$

avec  $R^0 s(t)$  le reste, ou résidu, après l'approximation de  $s(t)$  par  $g_{\gamma_0}(t)$ .

Le reste est donc orthogonal à  $g_{\gamma_0}(t)$ , ce qui permet d'écrire :

$$|s|^2 = a_0^2 + |R^0 s|^2 \tag{55}$$

En première approche, on peut assimiler  $s(t)$  à sa projection sur  $g_{\gamma_0}(t)$ .

■ Ensuite, l'algorithme projette les restes courants  $R^0 s(t)$ ,  $R^1 s(t)$  du signal sur  $D$  de manière itérative jusqu'à ce que le résidu devienne nul. Au rang  $n$ , en appelant :

$$a_n = \text{Sup}_{\{\gamma \in \Gamma\}} |\langle R^n s, g_\gamma \rangle| = \langle R^n s, g_{\gamma_n} \rangle \tag{56}$$

on aboutit à :

$$R^n s(t) = a_n g_{\gamma_n}(t) + R^{n+1} s(t) \quad (57)$$

Le reste  $R^{n+1} s(t)$  étant orthogonal à la composante trouvée, on en déduit encore que :

$$|R^n s|^2 = a_n^2 + |R^{n+1} s|^2 \quad (58)$$

En particulier, on peut récrire ces relations au rang  $n$  sous la forme :

$$s(t) = \sum_{i=0 \rightarrow n} a_i g_{\gamma_i}(t) + R^{n+1} s(t) \quad (59)$$

$$|s|^2 = \sum_{i=0 \rightarrow n} a_i^2 + |R^{n+1} s|^2 \quad (60)$$

$s(t)$  est ainsi décomposé en une somme d'éléments du dictionnaire  $D$ , obtenus par projections itératives, qui s'apparentent localement au signal. La décomposition ainsi mise en avant converge vers  $s(t)$ , en particulier, on peut démontrer [34] que :

$$s(t) = \sum_{i=0 \rightarrow \infty} a_i g_{\gamma_i}(t) \quad (61)$$

$$|s|^2 = \sum_{i=0 \rightarrow \infty} a_i^2 \quad (62)$$

Bien que cette décomposition ne soit pas linéaire, elle vérifie la conservation de l'énergie du signal.

**Nota** : si  $D$  est une base orthogonale, on a plus simplement  $\langle R^n s, g_{\gamma} \rangle = \langle s, g_{\gamma} \rangle$ .

■ Dans les espaces de dimension infinie,  $\Gamma$  est infini :

$$a_n = \text{Sup}_{\{\gamma \in \Gamma\}} |\langle R^n s, g_{\gamma} \rangle| \quad (63)$$

peut ne pas être atteint. Un facteur  $\eta$ , tel que  $0 < \eta \leq 1$  et

$$a_n = |\langle R^n s, g_{\gamma_n} \rangle| = \eta \text{Sup}_{\{\gamma \in \Gamma\}} |\langle R^n s, g_{\gamma} \rangle| \quad (64)$$

est défini, pour permettre d'itérer l'algorithme de la même manière que dans les espaces de dimension finie. Dans ce dernier cas, ce même  $\eta$  peut être utilisé pour trouver une approximation de la solution afin d'appliquer des algorithmes de recherche (gradient conjugué) plus rapides vers la solution.

La convergence de la décomposition et la conservation de l'énergie sont encore respectées [34].

Le test d'arrêt de l'algorithme peut alors se faire simplement sur l'énergie du reste. Si  $\epsilon$  représente l'erreur que l'on s'autorise sur la reconstruction du signal :

$$|R^p s| = \left| s - \sum_{n=0 \rightarrow p-1} \langle R^n s, g_{\gamma_n} \rangle g_{\gamma_n} \right| \leq \epsilon |s| \quad (65)$$

La conservation de l'énergie donne alors :

$$|s|^2 - \sum_{n=0 \rightarrow p-1} |\langle R^n s, g_{\gamma_n} \rangle|^2 \leq \epsilon^2 |s|^2 \quad (66)$$

### 2.3.3.3 Choix de $g(t)$

L'algorithme du *matching pursuit* recherche de manière itérative la plus grande corrélation entre un élément  $g_{\gamma}(t)$  du dictionnaire, localisé en  $\gamma = \{a, \xi, b\}$  et le reste courant du signal. Il est clair que localement, cette ressemblance sera d'autant plus grande que la fonction  $g(t)$  choisie aura une forme proche de celle des structures que l'on recherche dans le signal.

Le choix des fenêtres gaussiennes, optimal vis-à-vis du principe d'incertitude, peut ainsi paraître arbitraire par rapport à certains

signaux. Suivant l'application souhaitée, il peut être préférable de choisir des formes différentes.

### 2.3.3.4 Choix du dictionnaire

Pour que l'algorithme converge bien, en peu d'itérations il faut jouer sur un paramètre supplémentaire : l'enveloppe. Celle-ci doit être bien corrélée au signal. En général, on ne sait pas *a priori* ce que contient ce dernier. Il peut dès lors sembler judicieux d'augmenter la taille du dictionnaire  $D$  en introduisant diverses fonctions de forme  $g(t)$ , pour balayer un horizon assez large de possibilités. La taille du dictionnaire se trouve alors sensiblement augmentée, ce qui suppose que les temps de calcul ou la place en mémoire deviennent des contraintes pour une utilisation simple et rapide de l'algorithme. Un compromis entre taille et redondance que l'on se donne sur  $D$  d'une part, et vitesse et possibilités techniques d'autre part, doit alors être trouvé.

Il est possible, pour déterminer les « meilleurs » enveloppes, de décomposer en partie le signal sur un ensemble de dictionnaires  $D_g$  puis de comparer chaque  $D_g$ . La sélection se fait en termes de taux de décroissance des coefficients  $a_n$ , de nombre d'itérations ou de *taux de corrélation*, afin d'extraire les enveloppes permettant de retrouver le plus de *structures cohérentes* entre le signal et le dictionnaire.

La décomposition sur un dictionnaire  $D$  est d'autant plus rapide que ce dernier est adapté au signal. En particulier, plus les coefficients des projections itératives des restes  $R^n s(t)$  sont élevés et plus l'information est localisée sur un nombre réduit d'atomes significatifs. Le reste décroît de manière exponentielle, et ce d'autant plus vite que les résidus sont cohérents avec le dictionnaire. Au contraire, des produits scalaires faibles supposent que la décomposition se fait sur un nombre conséquent de vecteurs et que l'information se répartit partout dans le dictionnaire  $D$ .

## 3. InterTO et interFFG

L'intercorrélation  $I_{s_1, s_2}$  entre deux signaux  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$  :

$$I_{s_1, s_2}(\theta) = \int_{\mathbb{R}} s_1(b) s_2(b - \theta) db \quad (67)$$

$$I_{s_1, s_2}(\theta) \Leftrightarrow \hat{I}_{s_1, s_2}(\xi) = \hat{S}_1(\xi) \overline{\hat{S}_2(\xi)} \quad (68)$$

donne, entre autres, le temps moyen  $\theta$  dont il faut décaler l'un des signaux par rapport à l'autre pour que leur ressemblance soit maximale. Elle permet ainsi, par exemple, de retrouver le temps mis par un phénomène physique pour passer d'un premier capteur (signal  $s_1(t)$ ) au deuxième (signal  $s_2(t)$ ).

Malheureusement, cette ressemblance est globale sur tout le signal et ne tient pas compte des échelles locales. Si plusieurs phénomènes physiques d'échelles différentes cohabitent dans les signaux, cette fonction mélange tous les décalages présents entre composants, sans tenir compte de ces échelles.

### 3.1 Définition

Pour bien différencier les diverses fréquences ou échelles entre elles, il peut être judicieux de se servir des transformées temps-fréquence précédentes (TFO, FFG...) afin d'utiliser leur localisation en fréquence (ou échelle) et de pouvoir retrouver les décalages  $\theta$

moyens par le biais du filtrage passe-bande qu'elles procurent pour chaque échelle caractéristique.

Appelons  $x(b)$  la ligne d'échelle  $a$  pour une TO, ou  $v$  pour une FFG, de la décomposition du premier signal  $s_1(t)$  et  $y(b)$  la ligne de même fréquence du deuxième signal  $s_2(t)$ . Pour une TO par exemple, on obtient alors :

$$x(b) = \int_{\mathbb{R}} s_1(t) \psi_a(t-b) dt \quad (69)$$

$$x(b) \Leftrightarrow \hat{S}_1(\xi) \widehat{\psi}_a(\xi) \quad (70)$$

$$y(b) = \int_{\mathbb{R}} s_2(t) \psi_a(t-b) dt \quad (71)$$

$$y(b) \Leftrightarrow \hat{S}_2(\xi) \widehat{\psi}_a(\xi) \quad (72)$$

L'intercorrélation des deux lignes d'échelle  $a$ , dénommée par la suite interTO :  $I_{TO}^{a,b}[s_1, s_2]$ , dépend de deux paramètres :  $b$  et  $a$ .

Elle devient alors :

$$I_{TO}^{a,b}[s_1, s_2] \Leftrightarrow \widehat{S}_1(\xi) \widehat{\psi}_a(\xi) \widehat{S}_2(\xi) \widehat{\psi}_a(\xi) \quad (73)$$

$$I_{TO}^{a,b}[s_1, s_2] \Leftrightarrow \widehat{S}_1(\xi) \widehat{S}_2(\xi) \widehat{\psi}_a(\xi) \widehat{\psi}_a(\xi) \quad (74)$$

$$I_{TO}^{a,b}[s_1, s_2] \Leftrightarrow \widehat{I}_{s_1, s_2}(\xi) |\widehat{\psi}_a(\xi)|^2 \quad (75)$$

Cette approche par ondelettes se généralise aisément aux FFG, ce qui permet de définir une interTO ou une interFFG suivant le type de précision fréquentielle recherchée, la différence provenant de l'atome effectuant le filtrage en fréquence :

- à  $\Delta v/v$  constant pour les ondelettes ;
- à  $\Delta v$  constant pour les FFG.

D'une manière générale, si  $\phi$  représente un atome de décomposition, localisé en  $(b, v)$ , la transformée ainsi générée se définit par :

$$I_{\phi}^{b,v}[s_1, s_2] \Leftrightarrow \widehat{I}_{s_1, s_2}(\xi) |\widehat{\phi}_v(\xi)|^2 \quad (76)$$

### 3.2 Interprétation

En reprenant la formulation précédente, on voit bien que la transformée ainsi définie est une approximation de l'intercorrélation des deux signaux  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$  localement filtrés de manière énergétique autour de la fréquence  $v$ .

En définissant un nouvel atome  $\phi_v(\xi)$  par  $\phi_v(\xi) = |\phi_v(\xi)|^2$ , l'expression précédente (76) peut aussi s'écrire :

$$I_{\phi}^{b,v}[s_1, s_2] \Leftrightarrow \widehat{I}_{s_1, s_2}(\xi) \widehat{\phi}_v(\xi) \quad (77)$$

$$I_{\phi}^{b,v}[s_1, s_2] \Leftrightarrow \widehat{I}_{s_1, s_2}(\xi) \widehat{\phi}_v(\xi) \quad (78)$$

On retrouve directement la transformée en ondelettes de l'intercorrélation des deux signaux  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$ , que l'on peut aussi interpréter comme une généralisation de la fonction d'ambiguïté [35] à l'aide de fonctions spéciales en fréquence : les atomes  $\phi_v(\xi)$ .

## 4. Conclusion

L'outil le plus répandu pour analyser les signaux est la transformée de Fourier. Malheureusement, dans de nombreuses configurations, l'existence de phénomènes intermittants et peu cohérents donne des spectres large bande, difficiles à interpréter. Pour une meilleure analyse, il est nécessaire de suivre l'évolution temporelle de ces phénomènes. L'emploi de méthodes temps-fréquence semble donc tout indiqué.

Depuis les années 1980, l'utilisation de ces méthodes de traitement de l'information a fortement progressé dans différents domaines des mathématiques et de la physique, comme l'atteste le nombre de livres et de recueils d'articles publiés. De nombreux logiciels de traitement sont disponibles sur le marché mais l'interprétation des résultats obtenus n'est pas toujours évidente.

Parmi les techniques existantes et susceptibles de répondre aux problèmes posés, il est possible de répertorier une certaine classe de transformations : les décompositions continues atomiques. Nous avons montré le lien entre ces diverses décompositions (TO, FFG...) qui, interprétées comme une série de filtre passe-bande, s'unissent dans un même cadre intuitif. Une extension naturelle de ces méthodes consiste à sélectionner un filtre donnant la meilleure résolution temps-fréquence locale par rapport au signal analysé. Cela amène à introduire un paramètre supplémentaire d'échelle qui fournit une extension pour les structures discrètes des algorithmes temps-fréquence continus.

On dispose ainsi d'une famille de transformations continues donnant une description qualitative et quantitative de la densité d'énergie des signaux dans le plan temps-fréquence. À ces outils, il est possible d'associer des traitements complémentaires afin de poursuivre l'analyse des signaux :

- extraction des lois continues (modulations de fréquence et d'amplitude) caractérisant les composantes du signal ;
- détermination des temps de corrélation caractéristiques par fréquence (interTO, interFFG, permettant de prolonger la philosophie des transformations atomiques aux fonctions d'intercorrélation) ;
- extraction de structures discrètes, issues des transformées précédentes, par ajout d'un troisième paramètre d'échelle (*matching pursuit*).

Néanmoins lors de l'utilisation de ces outils, il ne faut pas oublier certains principes importants :

- lorsque l'on utilise un programme quelconque, il faut prendre en compte la théorie sous-jacente. En particulier, les limitations, tant logicielles que mathématiques, ne sont plus alors apparentes pour l'utilisateur, qui doit l'utiliser en connaissance de cause ;
- la TF est un outil robuste qui, une fois le signal connu, ne donne qu'un résultat. Ce dernier est entièrement et uniquement fonction du signal. Pour les décompositions atomiques, un paramètre supplémentaire intervient : la largeur de bande de l'atome initial (réglé par  $k_0$  dans l'article suivant [AF 4 511]). Ce paramètre joue sur l'aspect qualitatif et quantitatif de la transformée et devient un potentiomètre que le physicien doit régler de manière optimale pour mieux visualiser le contenu du signal. Cela suppose un apprentissage minimal ;
- la signification des résultats du traitement du signal tient compte des hypothèses faites sur les caractéristiques du phénomène. Il ne faut pas que l'information injectée a priori soit celle extraite et exhibée par le traitement (par exemple, prêter au signal un caractère gaussien introduit par la nature de l'ondelette analysante gaussienne).

## Références bibliographiques

- [1] GABOR (D.). – *Theory of communication*. Journal IEEE, 93,3, 429-457, 1946.
- [2] VILLE (J.). – *Théorie et applications de la notion de signal analytique*. Câbles et transmission, n° I-2A, 61-74, 1948.
- [3] FLANDRIN (P.). – *Temps-fréquence*. Hermes, 1993.
- [4] COHEN (L.). – *Time frequency distributions : A review*. Proceeding of the IEEE, 77, 7, 941-981, juil. 1989.
- [5] MORLET (J.). – *Sampling theory and wave propagation*. NATO ASI Series, F1, 233-261, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [6] CALDERON (A.P.). – *Intermediate Spaces and interpolation, the complex method*. Studia Math., 24, 2, 113-190, 1964.
- [7] COMBES (J.M.), GROSSMANN (A.) et TCHAMITCHIAN (P.). – *Wavelets : Time frequency methods and phase space*. Springer-Verlag, 1989.
- [8] MEYER (Y.). – *Ondelettes et opérateurs : Ondelettes*. vol. I, Hermann, 1989.
- [9] MALLAT (S.). – *Multiresolution representations and wavelets*. PhD Thesis, school of engineering and applied science, university of Pennsylvania, 1988.
- [10] MAYER (Y.). – *Ondelettes et opérateurs : Opérateurs de Calderon-Zygmund*. vol. II Hermann, 1989.
- [11] COHEN (A.). – *Ondelettes et traitement numérique du signal*. Masson, 1992.
- [12] FARGE (M.) et RABREAU (G.). – *Transformée en ondelettes pour détecter et analyser les structures cohérentes dans les écoulements turbulents bidimensionnelles*. C.R. Académie des sciences, 307, série II, 1479-1486, 1988.
- [13] MEYER (Y.). – *Wavelets and Applications*. Masson, 1991.
- [14] MURENZI (R.). – *Ondelettes multidimensionnelles et applications à l'analyse d'images*. PhD Thesis, université catholique de Louvain, Belgique, janvier 1990.
- [15] BOUYOUCHEFF (K.). – *Sur des aspects multirésolution en reconstruction d'images. Application au télescope spatiale Hubble*. Thèse de doctorat, université Paul-Sabatier, Toulouse, 1993.
- [16] EL-KHOURY (Z.). – *Transformée par ondelettes appliquée à l'holographie acoustique champ proche*. thèse de doctorat, ENSICA/ université Paul-Sabatier, Toulouse, 1993.
- [17] WISNOE (W.). – *Utilisation de la méthode de la transformée en ondelettes 2D pour l'analyse de visualisations d'écoulement*. Thèse de doctorat, École nationale supérieure de l'aéronautique et de l'espace (Sup'Aéro), 1993.
- [18] MEYER (Y.) et ROQUES (S.). – *Progress in wavelet analysis and applications*. Frontières, 1993.
- [19] MEYER (Y.), JAFFARD (S.) et RIOUL (O.). – *L'analyse par ondelettes*. Pour la science, 28-37, sept. 1989.
- [20] GUILLEMAIN (P.). – *Wavelet analysis of asymptotic signals : estimation of spectral lines with the help of the wavelet transform*. Dans MEYER (Y.). *Wavelets and Applications*. 38-60, Masson, 1991.
- [21] WISNOE (W.) et MARTINEZ (J.). – *Flow visualization processing by means of wavelet transform*. 4th Conference of Indonesian Aerospace Students in Europe, Londres, Sept. 1992.
- [22] MARTINEZ (J.). – *Caractérisation d'un débit-mètre industriel : utilisation de techniques de traitement du signal*, DEA ENSICA, Toulouse, sept. 1990.
- [23] RODDIER (F.). – *Distributions et transformée de Fourier*. MacGraw-Hill, 1981.
- [24] DAUBECHIES (I.). – *Orthonormal bases of compactly supported wavelets*. Communications on pure and Applied Mathematics, 41, 909-996, 1988.
- [25] GASQUET (C.) et WITOMSKI (P.). – *Analyse de Fourier et Applications*. Masson, 1990.
- [26] FARGE (M.). – *Wavelet transform and their applications to turbulence*. Annual Review on Fluid Mechanics, 24, 395-457, 1992.
- [27] DAUBECHIES (I.). – *The wavelet transform, time frequency localization and signal analysis*. IEEE Transactions on Information Theory, 36, 961-1005, 1990.
- [28] DAUBECHIES (I.). – *Ten lectures on wavelets*. SIAM, 1992.
- [29] FLANDRIN (P.). – *Some aspects of non stationary signal processing with emphasis on time frequency and time scale methods*. Dans COMBES (J.M.), GROSSMANN (A.), TCHAMITCHIAN (P.) *Wavelets : Time frequency methods and phase space*. 68-97, Springer-Verlag, 1989.
- [30] BOISSEAU (E.) et al. – *Analyse temps-fréquence*. dans MEYER (Y.), ROQUES (S.). *Progress in wavelet analysis and applications*. 263-270, Frontières, 1993.
- [31] TORRESANI (B.). – *Wavelet analysis of asymptotic signals : Ridge and skeleton of the transform*. Dans MEYER (Y.). *Wavelets and Applications*. 13-27, Masson, 1991.
- [32] TORRESANI (B.). – *Wavelet associated with representation of the Weyl Heisenberg group*. Journal of Math. Phys., 32, 1273-1279, mai 1991.
- [33] MALLAT (S.) et ZHANG (Z.). – *Non linear adaptive time frequency decomposition*. Dans MEYER (Y.), ROQUES (S.) *Progress in wavelet analysis and applications*. 155-164, Frontières, 1993.
- [34] MALLAT (S.) et ZHANG (Z.). – *Matching pursuit with time frequency dictionaries*. IEEE Transactions on Signal Processing, 41, 12, 3397-3415, déc. 1993.
- [35] MARTINEZ (J.). – *Méthodes temps-fréquence appliquées à l'analyse de signaux issus d'écoulements turbulents*. Thèse de doctorat. École nationale supérieure de l'aéronautique et de l'espace (Sup'Aéro), 1994.