Distributions

Convolution et transformée de Fourier

par **Michel DOISY**
Maître de conférences en mathématiques
École nationale supérieure d'électrotechnique, d'électronique, d'informatique, d'hydraulique et des télécommunications (ENSEEIHT)
Institut national polytechnique de Toulouse

Dans un premier article [AF 144], nous avons présenté les principales opérations sur les distributions et abordé la notion fondamentale de dérivée d'une distribution.

Ce deuxième article traite plus particulièrement du produit de convolution des distributions et de leur transformée de Fourier.

Utilisés conjointement, le produit de convolution et la transformée de Fourier sont deux outils très efficaces pour résoudre certaines équations différentielles. Soit par exemple à résoudre :

$$-\frac{1}{\omega^2}g'' + g = f$$

Formellement*, et en utilisant les propriétés du produit de convolution et de la transformée de Fourier [1], on peut écrire :*

$$-\frac{1}{\omega^2}(2\mathrm{i}\pi t)^2\hat{g}(t) + \hat{g}(t) = \hat{f}(t)$$

soit encore :

$$\hat{g}(t)\left[1 + \frac{4\pi^2 t^2}{\omega^2}\right] = \hat{f}(t)$$

Comme la fonction $\left[1 + \frac{4\pi^2 t^2}{\omega^2}\right]$ *n'a pas de zéro réel :*

$$\hat{g}(t) = \frac{1}{1 + \frac{4\pi^2 t^2}{\omega^2}}\hat{f}(t)$$

En utilisant les tables de transformées de Fourier, on a :

$$\frac{1}{1+\frac{4\pi^2 t^2}{\omega^2}} = \hat{h}(t) \quad \textit{avec} \quad h(x) = \frac{1}{2}\omega e^{-\omega|x|}$$

Finalement :

$$\hat{g}(t) = \hat{h}(t)\hat{f}(t) = \widehat{h * f}(t)$$

et grâce à l'injectivité de la transformée de Fourier :

$$g = h * f$$

ou encore :

$$g(x) = \frac{1}{2}\omega\int_{\mathbb{R}} e^{-\omega|x-t|} f(t)\,dt$$

Bien entendu, dans ce calcul, plusieurs points restent à justifier ! Mais l'idée fondamentale est qu'en utilisant presque uniquement un calcul formel, on obtient la forme générale de la solution. On cherche à accroître l'efficacité de ce calcul symbolique en utilisant ces opérations au sens des ***distributions****.*

En s'appuyant sur le fait que l'opérateur de dérivation des distributions est un produit de convolution $T^{(n)} = \delta^{(n)} * T$*, on montrera l'importance de la recherche de solutions des équations différentielles, avec second membre la distribution* δ *(****solution de Green****).*

Dans la définition du produit de convolution de deux distributions, la notion de support d'une distribution *joue un rôle fondamental. Nous étudions en détail cette notion délicate dans le premier paragraphe. Nous montrons ensuite comment le produit de convolution permet la recherche de solutions des équations différentielles en utilisant — en grande partie — un calcul algébrique dans une* ***algèbre de convolution convenable****. Nous définissons enfin la notion de transformée de Fourier des* ***distributions tempérées*** *et nous étudions les propriétés conjointes du produit de convolution et transformée de Fourier des distributions, propriétés très voisines de celles qui existent pour les fonctions.*

1. Support d'une distribution

Il s'agit là d'une notion importante, notamment pour la définition du produit de convolution des distributions.

Rappelons que si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, son support est le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel elle s'annule. Ou encore :

$$\mathbf{Supp}\,(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R} \;/\; f(x) \neq 0\}}$$

où la barre désigne la fermeture de l'ensemble.

Le support d'une fonction est toujours un fermé.

On utilise la même idée pour définir le support d'une distribution.

Définition

Soit T dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}$, on dit que T est nulle sur Ω si et seulement si, pour toute fonction φ de $\mathcal{D}(\Omega)$, on a $\langle T, \varphi\rangle = 0$. Il est équivalent de dire que la restriction de T à $\mathcal{D}(\Omega)$ est nulle.

Soit alors la famille $\{\Omega_i\}_i$ de tous les ouverts sur lesquels T s'annule et $\Omega = \cup_i \Omega_i$. C'est un ouvert et l'on peut montrer (ce n'est pas évident !) que T s'annule sur Ω. C'est le ***plus grand ouvert*** sur lequel T s'annule.

Définition

Le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel T s'annule est le support de la distribution T noté **Supp**(T).

Exemple : Supp$(\delta_a) = \{a\}$.

Si T est une distribution régulière associée à une fonction f localement intégrable, soit $T = [f]$, on montre que :

$$\mathbf{Supp}([f]) = \mathbf{Supp}(f)$$

et les deux notions coïncident. On a aussi :

$$\mathbf{Supp}\left(vp\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \mathbf{Supp}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathbb{R}$$

Comment reconnaît-on si un point x appartient ou non au support d'une distribution ?

On a les caractérisations suivantes.

Proposition

i) Un point x appartient au support de T si et seulement si, pour tout voisinage ouvert V de ce point, il existe φ dans $\mathcal{D}(V)$ telle que $\langle T, \varphi \rangle \neq 0$.

ii) Inversement, on dira que T est nulle au voisinage de x – et non nulle en x – si et seulement si x n'appartient pas au support de T, c'est-à-dire s'il existe un voisinage U de x tel que, quel que soit φ dans $\mathcal{D}(U)$, on ait $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

iii) Soit une fonction φ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\mathbf{Supp}(\varphi) \cap \mathbf{Supp}(T) = \varnothing$$

alors $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

iv) Si deux fonctions φ et ψ de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ coïncident sur un voisinage du support de T, alors $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \psi \rangle$.

v) Si T et W sont deux distributions, on a :

$$\mathbf{Supp}(T + W) \subset \mathbf{Supp}(T) + \mathbf{Supp}(W)$$

vi) Pour toute distribution T, on a :

$$\mathbf{Supp}\,(T') \subset \mathbf{Supp}\,(T)$$

Ces caractérisations découlent de la définition du support.

Revenons brièvement sur la propriété ***iv)***. La démonstration en est simple : soit V un voisinage ouvert de $\mathbf{Supp}(T)$ sur lequel φ et ψ coïncident. On peut toujours inclure entre $\mathbf{Supp}(T)$ et V un voisinage ***fermé*** F, donc :

$$\mathbf{Supp}(T) \subset F \subset V$$

Alors, par hypothèse, $\mathbf{Supp}(\varphi - \psi)$ est contenue dans F^c et donc, à fortiori, contenu dans $(\mathbf{Supp}(T))^c$. Par définition du support, on a $\langle T, \varphi - \psi \rangle = 0$.

Par contre, il ne suffit pas que deux fonctions φ et ψ de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ coïncident ***sur le support*** de T pour que $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \psi \rangle$.

Exemple : prenons φ et ψ de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ valant 1 en 0 et ayant une dérivée distincte en 0, soit $\varphi'(0) \neq \psi'(0)$. Alors $\langle \delta', \varphi \rangle \neq \langle \delta', \psi \rangle$, alors que φ et ψ coïncident sur le support de δ' qui est $\{0\}$.

L'inclusion $\mathbf{Supp}\,(T') \subset \mathbf{Supp}\,(T)$ est en général stricte ! Pensez à la distribution d'Heaviside H de support $\mathbb{R}^+$ et dont la dérivée est la distribution de Dirac δ de support $\{0\}$.

Certaines formes de support auront une grande importance pour la suite.

Définition

On notera $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ l'espace des distributions à support limité à gauche, c'est-à-dire

$$T \in \mathcal{D}_+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists t_0 \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad \mathbf{Supp}\,(T) \subset [\,t_0\,,\,+\infty[$$

En théorie du signal, ces distributions seront associées aux ***signaux causaux***.

Symétriquement, on définit $\mathcal{D}'_-(\mathbb{R})$:

$$T \in \mathcal{D}_-(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists t_0 \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad \mathbf{Supp}\,(T) \subset \,]-\infty\,,\,t_0\,]$$

Définition

On dira que T dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est une distribution à support compact si et seulement si $\mathbf{Supp}(T)$ est un ensemble compact de $\mathbb{R}$.

Cette famille de distributions est particulièrement importante pour plusieurs raisons, dont voici la première. Pour une distribution à support compact, on peut étendre sa définition à un ensemble de fonctions tests plus gros !

Soit en effet T à support compact. Nous noterons, comme il est d'usage en théorie des distributions, $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.

On peut construire une fonction θ indéfiniment dérivable à support compact et qui vaut 1 dans un voisinage de $\mathbf{Supp}(T)$. Soit alors u une fonction dans $\mathcal{E}(\mathbb{R})$. On pose :

$$\langle T, u \rangle = \langle T, \theta u \rangle \text{ pour } u \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$$

En effet, θu est une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et cette définition ne dépend pas du choix de θ. Si l'on considère une autre fonction η de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui vaut 1 dans un voisinage de $\mathbf{Supp}(T)$, alors $(\theta - \eta)u$ est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et s'annule sur un voisinage de $\mathbf{Supp}(T)$ donc $\langle T, \theta u \rangle = \langle T, \eta u \rangle$. Ainsi, pour une distribution à support compact, on peut étendre sa définition à $\mathcal{E}(\mathbb{R})$.

On munit $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ de la notion de convergence suivante.

Définition

Une suite $\{u_n\}_n$ de fonctions de $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ converge vers une fonction $u \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ si et seulement si la suite $\{u_n\}_n$ ainsi que toutes les dérivées successives $\{u_n^{(k)}\}_n$ convergent uniformément vers u (resp. $u^{(k)}$).

Il est alors facile de voir que si $\{u_n\}_n$ converge vers 0 dans $\mathcal{E}(\mathbb{R})$, alors $\{\theta u_n\}_n$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et donc le prolongement de T vérifie :

$$\langle T, u_n \rangle \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Cela montre que T est un opérateur continu de $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{C}$ ou encore que, pour toute distribution à support compact, on a :

$$T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$$

En fait, on montre que la réciproque est vraie à savoir que $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ est exactement l'ensemble des distributions à support compact.

$\boxed{\mathcal{E}'(\mathbb{R}) \text{ est l'ensemble des distributions à support compact}}$

2. Produit de convolution des distributions

2.1 Produit tensoriel des distributions

Si f et g sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on définit leur produit tensoriel comme la fonction de deux variables :

$$f \otimes g(x, y) = f(x)g(y)$$

Grâce au théorème de Fubini, on vérifie que si f et g sont localement intégrables sur $\mathbb{R}$, alors $f \otimes g$ l'est aussi sur $\mathbb{R}^2$. On peut alors construire une distribution sur $\mathbb{R}^2$ en posant :

$$\begin{cases} [f \otimes g] : & \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{C} \\ & \xi \to \langle [f \otimes g], \xi \rangle = \displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} \xi(x, y) f(x) g(y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{cases}$$

Toujours grâce au théorème de Fubini, on peut écrire :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \xi(x, y) f(x) g(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} g(y)\left[\int_{\mathbb{R}} \xi(x, y) f(x)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$
$$= \int_{\mathbb{R}} f(x)\left[\int_{\mathbb{R}} \xi(x, y) g(y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

En termes de distribution – et en gardant les variables pour plus de lisibilité – on a :

$$\langle [f] \otimes [g], \xi \rangle = \langle g(y), \langle f(x), \xi(x, y) \rangle \rangle$$
$$= \langle f(x), \langle g(y), \xi(x, y) \rangle \rangle$$

C'est cette dernière formule qui va nous permettre d'étendre cette définition de produit tensoriel au cas de deux distributions quelconques. On admet le résultat suivant.

Théorème

Si S et T sont deux distributions sur $\mathbb{R}$, les expressions :

$$\langle S_x, \langle T_y, \xi(x, y) \rangle \rangle \quad \text{et} \quad \langle T_y, \langle S_x, \xi(x, y) \rangle \rangle$$

(où, comme précédemment, l'indice est conservé pour indiquer sur quelle variable on fait porter la distribution) ont un sens et ont la même valeur, quel que soit ξ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$.

La forme linéaire ainsi définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ est une distribution sur $\mathbb{R}^2$, notée $S \otimes T$ ou $S_x \otimes T_y$. Si $\xi(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$ avec φ et ψ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors :

$$\langle S \otimes T, \xi \rangle = \langle S, \varphi \rangle \langle T, \psi \rangle$$

Exemple :

1. Pour f et g dans $\mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$, on a :

$$[f \otimes g] = [f] \otimes [g]$$

2. $\delta_x \otimes \delta_y = \delta$ distribution de Dirac à l'origine de $\mathbb{R}^2$.

3. $\delta_x \otimes \Delta_y$ représente un peigne de Dirac selon l'axe Oy.

4. $\Delta_x \otimes 1$ représente une somme de distributions linéaires de Dirac sur les axes d'abscisse entière parallèles à l'axe Oy.

5. $\Delta_x \otimes \Delta_y$ que l'on notera $\Delta_{x,\,y}$ représente le peigne de Dirac à deux dimensions formé de distributions ponctuelles de Dirac en tout point de coordonnées entières.

2.2 Propriétés du produit tensoriel

Voici les principales propriétés du produit tensoriel.

Proposition

***i*) Continuité**

Si la suite $\{S_n\}_n$ converge vers S dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et la suite $\{T_n\}_n$ converge vers T dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, alors $\{S_n \otimes T_n\}_n$ converge vers $S \otimes T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

***ii*) Support**

On a :

$$\mathbf{Supp}(S \otimes T) = \mathbf{Supp}(S) \times \mathbf{Supp}(T)$$

***iii*) Dérivation**

$$(D_x^\alpha \,.\, D_y^\beta)(S \otimes T) = D_x^\alpha(S) \otimes D_y^\beta(T) \quad \forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

***iv*) Pseudo-produit**

Si f et g sont des fonctions quelconques de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, on a :

$$(f \otimes g) \,.\, (S \otimes T) = f \,.\, S \otimes g \,.\, T$$

***v*) Symétrie**

$$S_\sigma \otimes T_\sigma = (S \otimes T)_\sigma$$

***vi*) Translation**

$$\tau_a \,.\, S \otimes \tau_b \,.\, T = \tau_{(a,\,b)} \,.\, S \otimes T$$

Par contre, en général :

$$S_x \otimes T_y \neq T_x \otimes S_y$$

alors que, par construction :

$$S_x \otimes T_y = T_y \otimes S_x$$

En effet, prenons $S = [f]$ avec $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$ et $T = \delta$. On a :

$$\langle S_x \otimes T_y, \xi(x, y) \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\xi(x, 0)\,\mathrm{d}x$$

et

$$\langle T_x \otimes S_y, \xi(x, y) \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(y)\xi(0, y)\,\mathrm{d}y$$

2.3 Produit de convolution de distributions

On sait [1] que si f et g sont deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$, la fonction

$$y \to f(x - y)g(y)$$

est intégrable en y pour presque tout x de $\mathbb{R}$. On définit alors le ***produit de convolution*** de f et g noté $f * g$ comme la fonction (définie presque partout) :

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x - y)\,\mathrm{d}y$$

(la deuxième formule se déduisant de la première par le théorème de changement de variables dans les intégrales). On sait de plus que $f * g$ est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. Soit alors la distribution régulière associée :

$$\langle f * g(x), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f * g(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

qui s'écrit, grâce au théorème de Fubini :

$$\langle f * g(x), \varphi \rangle = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x - y)g(y)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

et, par le changement de variables :

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = y \end{cases}$$

$$\langle f * g(x), \varphi \rangle = \iint_{\mathbb{R}^2} f(u)g(v)\varphi(u+v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \qquad \textbf{(1)}$$

Sous cette forme, on voit opérer la distribution produit tensoriel $f \otimes g$, ou plutôt ***son prolongement***, car la fonction : $(u, v) \to \varphi(u + v)$ sur laquelle elle opère n'appartient pas à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ mais est seulement indéfiniment dérivable ! En effet, si la fonction φ n'est pas identiquement nulle, il existe c dans $\mathbb{R}$ tel que $\varphi(c) \neq 0$ et alors le support de $(u, v) \to \varphi(u + v)$ contient au moins toute la droite du plan d'équation $x + y = c$ et n'est pas borné. C'est la difficulté pour étendre la définition du produit de convolution à partir de la formule qui précède. La formule (1) ne pourra s'étendre à deux distributions S et T que si leur produit tensoriel se prolonge à un espace de fonctions plus vaste que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ et contenant au moins les fonctions $(u, v) \to \varphi(u + v)$ pour toute fonction φ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

S'inspirant de ce que nous avons fait pour étendre la définition des distributions à support compact aux fonctions de $\mathcal{E}(\mathbb{R})$, nous allons chercher une extension de $S \otimes T$ de la forme suivante :

$$\langle S \otimes T, \Theta\xi \rangle$$

avec $\Theta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ valant 1 sur un voisinage du support de $S \otimes T$ et telle que l'application $(x, y) \to \Theta(x, y)\varphi(x + y)$ appartienne à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ pour toute fonction φ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Pour mettre en évidence une telle fonction Θ, on raisonne sur les supports.

Posons $A = \mathbf{Supp}(S)$, $B = \mathbf{Supp}(T)$, $K = \mathbf{Supp}(\varphi)$ pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et enfin :

$$K^\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{t.q.} \quad x + y \in K\}$$

Intuitivement, si $A \times B \cap K^\Delta$ est compact dans $\mathbb{R}^2$, « tout se passe » dans un compact et l'extension est valide. On montre effectivement [2] que si :

$$A \times B \cap K^\Delta \text{ est compact dans } \mathbb{R}^2$$

la construction de Θ s'obtient facilement.

Définition

Deux sous-ensembles fermés A et B de $\mathbb{R}$ sont dits convolutifs, si et seulement si, pour tout compact K de $\mathbb{R}$ l'ensemble :

$$A \times B \cap K^\Delta \text{ est compact dans } \mathbb{R}^2$$

Voici les principaux cas d'ensembles convolutifs qui vont nous intéresser pour la définition du produit de convolution de distributions. Nous illustrons ces cas de trois figures **1**, **2** et **3** qui font comprendre le rôle joué par les différents supports. Nous réduisons volontairement dans ces dessins les compacts à des intervalles fermés bornés.

Proposition

Dans chacun de ces cas, la formule :

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S \otimes T, \Theta(x, y)\varphi(x + y) \rangle$$

a un sens quelle que soit la fonction φ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et définit une distribution sur $\mathbb{R}$ indépendante du choix de Θ.

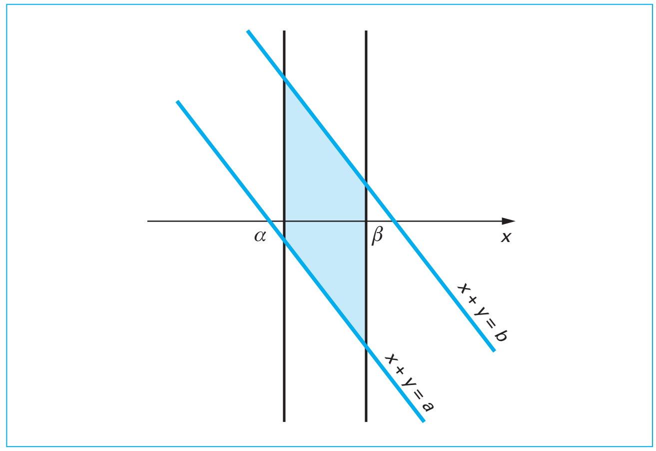

Figure 1 – Supp(*S*) = [α, β], Supp(*T*) quelconque et Supp(φ) = [*a*, *b*]

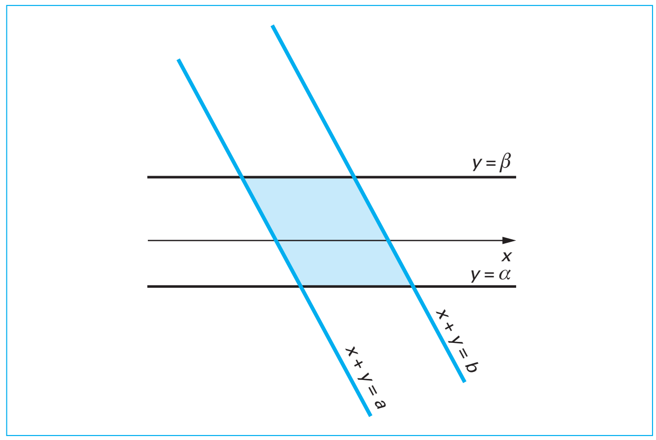

Figure 2 – (symétrique de la précédente) Supp(*S*) quelconque, Supp(*T*) = [α, β] et Supp(φ) = [*a*, *b*]

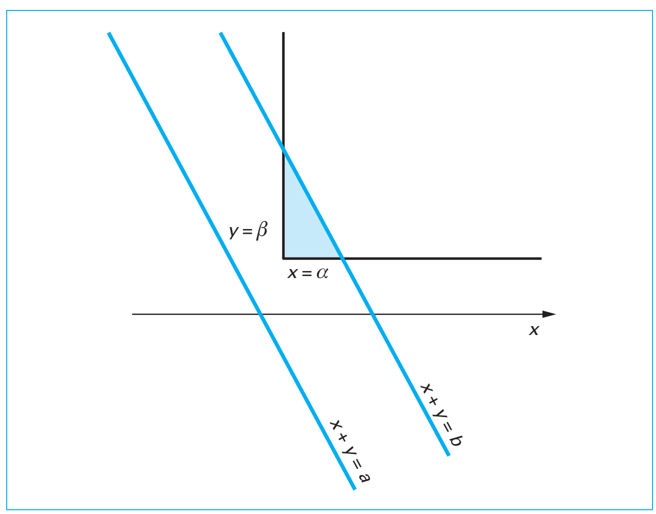

Figure 3 – *S* et *T* appartiennent à $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{D}'_-(\mathbb{R})$)

Notons que ce ne sont pas les seuls cas où l'on peut définir le produit de convolution $S * T$. On a vu déjà que, pour les distributions régulières associées à des fonctions intégrables, il n'y a pas de restriction de support.

1. On a vu que H est dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ et donc $H * H$ est bien défini. Dans les calculs portant sur $H * H$, il sera inutile – *et cela sera vrai aussi dans la suite* – de faire intervenir la fonction Θ.

L'important est qu'elle existe et qu'elle vaut 1 le support d'intégration. On a :

$$\langle H * H, \varphi \rangle = \iint_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} \varphi(x+y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Par le changement de variables :

$$\begin{cases} u = x \\ v = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u \\ y = v - u \end{cases}$$

et en posant $E = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{t.q.} \quad 0 \leqslant u \leqslant v\}$

$$\langle H * H, \varphi \rangle = \iint_E \varphi(v)\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Par le théorème de Fubini, on peut intégrer tout d'abord en u puis en v :

$$\langle H * H, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi(v) \left[\int_0^v \mathrm{d}u \right] \mathrm{d}v = \int_0^{+\infty} v\varphi(v)\, \mathrm{d}v$$

On en déduit :

$$H * H = xH = [x^+] \text{ si } x^+ = \sup(0, x)$$

2. Pour $S = \delta_a$ et T quelconque dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $\delta_a * T$ est bien définie et l'on a :

$$\langle \delta_a * T, \varphi \rangle = \langle \delta_a \otimes T, \varphi(x+y) \rangle = \langle T, \varphi(a+y) \rangle = \langle T, \tau_{-a} . \varphi(y) \rangle = \langle \tau_a . T, \varphi \rangle$$

et donc :

$$\delta_a * T = \tau_a . T \quad \forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

En particulier :

$$\delta * T = T \quad \forall T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

et :

$$\boxed{\delta \text{ est élément neutre pour le produit de convolution}}$$

3. La distribution $T * \Delta$ n'a de sens que si T est à support compact et alors :

$$\langle T * \Delta, \varphi \rangle = \langle T \otimes \Delta, \varphi(x+y) \rangle = \langle T, \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(x+n) \rangle = \langle T, \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tau_{-n} . \varphi \rangle$$

Comme T est supposé à support compact, pour $|n|$ assez grand :

$$\mathbf{Supp}(T) \cap \mathbf{Supp}(\tau_{-n} . \varphi) = \varnothing$$

et la somme précédente est une somme finie.

2.4 Propriétés du produit de convolution

Dans la suite, on suppose que le produit de convolution des distributions est défini.

Proposition

i) Le produit de convolution est commutatif :

$$S * T = T * S$$

ii) On a la propriété de dérivation suivante, quel que soit k dans $\mathbb{N}^*$:

$$(S * T)^{(k)} = (S^{(k)} * T) = (S^{(k-1)} * T') = \ldots = (S * T^{(k)})$$

iii) Sous réserve que tous les produits de convolution deux à deux soient définis, on a :

$$R * (S * T) = (R * S) * T = R * S * T$$

iv) Si $\mathbf{Supp}(S)$ et $\mathbf{Supp}(T)$ sont convolutifs, on a :

$$\mathbf{Supp}(S * T) \subset \mathbf{Supp}(S) + \mathbf{Supp}(T)$$

Si, de plus, $\mathbf{Supp}(S)$ et $\mathbf{Supp}(T)$ sont compacts alors $\mathbf{Supp}(S * T)$ est compact.

1. La propriété ***ii)*** est particulièrement importante car, utilisée avec l'élément neutre δ, on en déduit que, pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$T^{(n)} = T * \delta^{(n)} = \delta^{(n)} * T$$

La dérivation d'une distribution coïncide avec la convoluée de la dérivée de même ordre de la distribution de Dirac. Plus généralement, soit $P(X)$ un polynôme :

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$$

et $P(D)$ le polynôme de dérivation associé :

$$P(D) = a_0 + a_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \ldots + a_n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}$$

on a pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$P(D)(T) = P(D)(\delta * T) = [P(D)(\delta)] * T$$

La définition suivante nous sera utile dans la suite.

Définition

Soit $P(D)$ un polynôme de dérivation sur $\mathbb{R}$, on appelle solution élémentaire de l'opérateur de dérivation ou encore solution de Green, toute distribution E vérifiant

$$P(D)(E) = \delta$$

Voici très brièvement l'intérêt de cette notion.

Lorsque l'on cherche à résoudre une équation différentielle dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que l'on cherche à identifier les distributions telles que :

$$P(D)(X) = T$$

avec T connue, si l'on connaît une solution élémentaire E de l'opérateur $P(D)$, et sous réserve que les supports de E et de T soient convolutifs, on a :

$$P(D)(E * T) = [P(D)(E)] * T = \delta * T = T$$

Ainsi :

$$\boxed{E * T \text{ est solution de l'équation différentielle}}$$

Cela ramène la recherche d'une solution de l'équation différentielle à la recherche d'une solution élémentaire. Notons enfin que, en écrivant :

$$P(D)(E) = P(D)(\delta * E) = [P(D)(\delta)] * E = \delta$$

la recherche de E revient à ***inverser*** dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'opérateur de dérivation.

Une autre conséquence intéressante de cette propriété de dérivation est la suivante. Si $T \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ ou si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, on obtient une primitive de T en considérant $T * H$. En effet, on a :

$$(T * H)' = T * H' = T * \delta = T$$

2. En ce qui concerne la propriété ***iii)***, il se peut que $R * (S * T)$ et $(R * S) * T$ soient définis, sans qu'il y ait égalité, comme le montre l'exemple classique suivant.

Exemple : soit $R = 1$, $S = \delta'$ et $T = H$. On a :

$$R * S = 1 * \delta' = (1 * \delta)' = 1' = 0$$

donc :

$$(R * S) * T = 0$$

D'autre part :

$$S * T = \delta' * H = (\delta * H)' = H' = \delta$$

donc :

$$R * (S * T) = R = 1$$

3. Enfin ***iv)*** montre que le produit de convolution est une ***opération interne***, à la fois dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ et dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$:

$$\begin{cases} \mathcal{D}'_+(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}'_+(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}'_+(\mathbb{R}) \\ \qquad (S, T) \to S * T \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \mathcal{E}'(\mathbb{R}) \times \mathcal{E}'(\mathbb{R}) \to \mathcal{E}'(\mathbb{R}) \\ \qquad (S, T) \to S * T \end{cases}$$

Nous étudions le cas particulier d'un produit de convolution avec une distribution régulière.

Proposition

Pour toute distribution S appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et toute fonction f appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, le produit de convolution $S * [f]$ est bien défini et c'est la distribution régulière associée à la fonction $\mathcal{C}^\infty$:

$$h(z) = \langle S_x, f(z - x) \rangle \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

et donc, on peut écrire :

$$S * [f] = [h]$$

Pour toute distribution S à support compact c'est-à-dire $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ et toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, le produit de convolution $S * [f]$ est bien défini et c'est la distribution régulière associée à la fonction $\mathcal{C}^\infty$:

$$h(z) = \langle S_x, f(z - x) \rangle \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

■ On notera l'analogie de cette formule avec celle qui définit le produit de convolution des fonctions.

La continuité de l'opération de convolution est une propriété délicate. Mentionnons simplement un résultat, souvent suffisant dans la pratique [2].

Proposition

La distribution T étant fixée, l'application :

$$S \to S * T$$

est continue dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ si :

i) S varie en restant portée par un compact fixe ;

ii) S varie de façon quelconque mais T est à support compact ;

iii) S varie en restant portée par un intervalle $]a ; +\infty[$, T étant aussi causale.

Ces deux dernières propriétés permettent d'obtenir un important **théorème de densité** qui montre que toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est limite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ d'une suite de (distributions associées à des) fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Ce que l'on peut résumer par la formule :

Théorème

$$\boxed{\mathcal{D}(\mathbb{R}) \textit{ est dense dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R})}$$

Preuve. ♦ L'idée générale de la démonstration est la suivante.

Soit $\{\rho_n\}_n$ une suite régularisante qui converge vers δ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. En écrivant $\mathbb{R}$ comme une réunion croissante de compacts soit $\mathbb{R} = \cup_n K_n$, on montre que toute distribution T dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est limite d'une suite de distributions à support compact. On peut donc se limiter à faire la démonstration pour T à support compact. On a (continuité) :

$$[\rho_n] * T \to \delta * T \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

Mais $[\rho_n] * T$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact puisque **Supp**$([\rho_n])$ et **Supp**(T) sont compacts. Donc $[\rho_n] * T$ appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. ♦

2.5 Algèbre de convolution

Définition

On appelle algèbre de convolution de distributions, tout espace vectoriel de distributions contenant δ et dans lequel on peut définir le produit de convolution.

On en a vu deux exemples :

— l'ensemble $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ des distributions à support compact ;

— les ensembles $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ et $\mathcal{D}'_-(\mathbb{R})$.

Dans ces algèbres de convolution, on peut faire du **calcul algébrique** et donc résoudre des équations. On sait que, sous des hypothèses très générales de linéarité, continuité et invariance dans le temps, de très nombreux systèmes physiques peuvent être décrits en termes de produit de convolution. Supposons par exemple que le système physique que l'on étudie s'écrive :

$$A * X = B$$

avec A et B distributions connues,
X inconnue.

Si A admet un **inverse de convolution** noté A^{*-1}, vérifiant donc :

$$A^{*-1} * A = A * A^{*-1} = \delta$$

et **appartenant à la même algèbre de convolution que** B, on a :

$$X = A^{*-1} * B$$

et cela quel que soit B dans l'algèbre. De plus cette solution est unique ***dans cette algèbre de convolution***.

En Physique, on est souvent amené à résoudre des équations différentielles linéaires à coefficients constants :

$$P(D)X(t) = a_0 + a_1 \frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} + \ldots + a_n \frac{\mathrm{d}^n X(t)}{\mathrm{d}t^n} = B(t) \quad a_n \neq 0 \qquad \mathbf{(2)}$$

Grâce au formalisme de la théorie de distributions, on a vu que cette équation pouvait s'écrire :

$$P(D)(\delta) * X = B$$

et qu'alors le problème se ramenait à chercher une solution élémentaire de l'opérateur de dérivation :

$$P(D)(E) = \delta$$

donc à inverser l'opérateur $P(D)(\delta)$.

Exemple : Considérons l'équation différentielle :

$$X''(t) + \omega^2 X(t) = B(t) \qquad \mathbf{(3)}$$

On lui associe l'équation dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$(\delta'' + \omega^2 \delta) * X = B$$

et la recherche d'une solution élémentaire de l'opérateur de dérivation conduit à résoudre :

$$\delta'' + \omega^2 \delta * E = \delta \qquad \mathbf{(4)}$$

On vérifie facilement que :

$$\frac{1}{\omega} H(t) \sin(\omega t)$$

est solution de cette équation. Comme $\frac{1}{\omega} H(t) \sin(\omega t)$ appartient à $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ alors, quel que soit B appartenant aussi à $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$, l'équation **(3)** a une solution unique donnée par :

$$X = B * \left[\frac{1}{\omega} H(t) \sin(\omega t)\right]$$

Mais on vérifie aussi que :

$$-\frac{1}{\omega} H(-t) \sin(\omega t)$$

est une solution de **(4)**. Comme ici $-\frac{1}{\omega} H(-t) \sin(\omega t)$ appartient à $\mathcal{D}'_-(\mathbb{R})$, on obtient une solution unique dans $\mathcal{D}'_-(\mathbb{R})$ donnée par :

$$X = B * \left[-\frac{1}{\omega} H(-t) \sin(\omega t)\right]$$

Voici une méthode très générale pour la recherche d'une solution élémentaire de l'opérateur de dérivation. On sait que l'équation différentielle homogène associée à (2), soit

$$P(D)X(t) = a_0 + a_1 \frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} + \ldots + a_n \frac{\mathrm{d}^n X(t)}{\mathrm{d}t^n} = 0 \qquad \mathbf{(5)}$$

a une solution unique pour laquelle $X(0)$, $X'(0)$, ..., $X^{(n-1)}(0)$ prennent des valeurs données (*conditions initiales*). En particulier (5) a une solution unique $X_0(t)$ pour laquelle :

$$X(0) = X'(0) = \ldots = X^{(n-2)} = 0 \quad \text{et} \quad X^{(n-1)} = \frac{1}{a_n}$$

Considérons alors la distribution de $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$:

$$E = H \,.\, X_0(t)$$

On a dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$E' = H' \,.\, X_0(t) + H \,.\, X_0'(t) = \delta \,.\, X_0(t) + H \,.\, X_0'(t)$$

Comme par hypothèse $X_0(0) = 0$:

$$E' = H \,.\, X_0'(t)$$

Par le même argument :

$$E^{(k)} = H \,.\, X_0^{(k)}(t) \quad \text{pour } k = 1, \ldots, n-1$$

et

$$E^{(n)} = \delta \,.\, X_0^{(n-1)}(t) + H \,.\, X_0^{(n)}(t) = \frac{1}{a_n} \delta + H \,.\, X_0^{(n)}(t)$$

En sommant ces n dérivées, on a :

$$P(D)(H \,.\, X_0) = H \,.\, P(D)(X_0) + \delta$$

et, comme X_0 est solution de (5), on a $P(D)(X_0) = 0$ et donc :

$$P(D)(H \,.\, X_0) = \delta$$

et $E = H \,.\, X_0$ est une solution de Green pour l'opérateur de dérivation dans l'algèbre de convolution $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$. Alors :

$$X = (H \,.\, X_0) * B$$

est l'unique solution causale de (5) pour B causale.

Exemple : si l'on étudie l'oscillateur harmonique avec amortissement, pour $t \geqslant 0$:

$$X''(t) + 2\alpha X'(t) + \omega^2 = g(t) \qquad \omega^2 > \alpha^2$$

on vérifie que la solution de l'équation homogène avec conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ s'écrit :

$$X_0(t) = \frac{1}{\omega_1} \mathrm{e}^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t)$$

avec $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$.

D'après ce qui précède, la solution causale de l'équation s'écrit sous la forme de l'***intégrale de Duhamel*** [3] :

$$X(t) = (H \,.\, X_0) * g(t) = \frac{1}{\omega_1} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t} \sin(\omega_1 t) g(t-\tau)\, \mathrm{d}t$$

3. Transformée de Fourier des distributions

L'idée la plus naturelle, pour définir la transformée de Fourier d'une distribution est de poser :

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle$$

La difficulté provient du fait que pour φ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a bien $\hat{\varphi}$ indéfiniment dérivable mais jamais à support compact. Ainsi $\hat{\varphi}$ n'appartient pas $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et la formule précédente n'a pas de sens, sauf à pouvoir prolonger T à un espace plus gros que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. L'idée est alors de travailler dans un espace de fonctions tests qui soit *invariant* par la transformation de Fourier. Le *bon espace* est l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à décroissance rapide ainsi que leurs dérivées, **dit espace des fonctions de Schwartz**. C'est d'ailleurs cet espace qui permet la construction la plus simple de la transformée de Fourier dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Nous rappellerons tout d'abord les principales propriétés de cet espace de fonctions. Une fois construite la transformée de Fourier des distributions, nous utiliserons abondamment les propriétés de la transformée de Fourier des fonctions – dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ou dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ – pour en déduire les propriétés analogues pour les distributions. Le lecteur souhaitant revoir ces propriétés peut consulter l'ouvrage de Gasquet et Witomski [1].

3.1 Espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Définition

Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est à **décroissance rapide** si et seulement si :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \lim_{|x| \to \infty} |x^p f(x)| = 0$$

Une fonction **continue** f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est à décroissance rapide si et seulement si :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^p f(x)| < \infty$$

L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, dit **espace des fonctions de Schwarz**, est l'espace des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant :

i) $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$;

ii) f est à décroissance rapide ainsi que toutes ses dérivées, ce qui peut se traduire par :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2 \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^p f^{(q)}(x)| < \infty$$

Rappelons les principales propriétés de cet espace de fonctions en liaison avec la transformée de Fourier des fonctions intégrables définie par la formule :

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi x\lambda} \, dx \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Proposition

i) $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

ii) $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

iii) $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par transformée de Fourier, c'est-à-dire $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ entraîne $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

iv) On a, dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, l'égalité de Parseval-Plancherel :

$$\forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \int_{\mathbb{R}} f(x)\bar{g}(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\lambda)\bar{\hat{g}}(\lambda) \, d\lambda$$

et, en particulier, on a **conservation de l'énergie** :

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\lambda)|^2 \, d\lambda$$

On a évidemment $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Pour définir des distributions opérant sur l'espace de fonctions tests $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, il nous faut préciser la topologie sur cet espace. Comme pour $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, on peut se limiter à la notion de convergence des suites.

Définition

Une suite de fonctions $\{\psi_n\}_n$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ converge vers 0 quand n tend vers l'infini, si et seulement si, quels que soient p et q dans $\mathbb{N}$, les suites de fonctions $\{x^p \psi_n^{(q)}\}_n$ convergent uniformément vers 0 quand n tend vers l'infini. Cela se traduit de la façon suivante :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2 \quad \lim_{n \to \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^p \psi_n^{(q)}(x) \right| = 0$$

Si une suite $\{\rho_n\}_n$ de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors elle converge vers 0 dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Voici quelques propriétés utiles de la convergence dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Proposition

Si la suite $\{\psi_n\}_n$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ converge vers 0 quand n tend vers l'infini alors on a :

i) $\psi_n' \to 0$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (continuité de la dérivation).

ii) Pour tout polynôme P, on a $P\psi_n \to 0$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

iii) $\psi_n \to 0$ dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

iv) $\hat{\psi}_n \to 0$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (continuité de la transformée de Fourier).

3.2 Distributions tempérées

Définition

On appelle distribution tempérée toute forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire tout opérateur linéaire :

$$\begin{cases} T: & \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ \psi & \to \quad \langle T, \psi \rangle \end{cases}$$

tel que si $\{\psi_n\}_n$ converge vers 0 dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ quand n tend vers l'infini alors $\{\langle T, \psi_n \rangle\}_n$ tend vers 0. On notera $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ l'espace des distributions tempérées.

On a remarqué précédemment que, pour une suite de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, la convergence dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ implique la convergence dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors si T appartient à $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ on a, à plus forte raison, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On a donc :

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

Inversement, on peut se demander à quelle condition une distribution de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ peut se prolonger en une distribution tempérée.

Proposition

Pour qu'une distribution définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ puisse se prolonger en une distribution sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ il faut et il suffit que T soit une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ pour la convergence de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Ce qui signifie que, pour que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ se prolonge en une distribution tempérée, il faut et il suffit que, pour toute suite $\{\varphi_n\}_n$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui converge vers 0 dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, soit $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2 \ \lim\limits_{n \to \infty} \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} \left| x^p \varphi_n^{(q)} \right| = 0$, on doit avoir $\langle T, \varphi_n \rangle \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Cette condition est nécessaire. Pour démontrer qu'elle suffit, on s'appuie sur la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, car alors T se prolonge de façon unique en une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

3.3 Exemples de distributions tempérées

On s'intéresse tout d'abord aux distributions tempérées régulières. Par un phénomène de dualité, on introduit la notion de ***fonctions à croissance lente*** qui viennent ***tempérer*** la ***décroissance rapide*** des fonctions tests.

Définition

Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est dite à croissance lente si et seulement si :

$$\exists c > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| \leqslant c(1 + x^2)^N$$

Une telle fonction est clairement localement intégrable – puisque $(1 + x^2)^N$ l'est – donc définit une distribution régulière.

Proposition

Toute fonction à croissance lente définie une distribution régulière tempérée.

Preuve. ♦On a $[f] \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et on utilise la caractérisation précédente pour montrer que $[f] \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Soit alors $\{\varphi_n\}_n$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui converge vers 0 dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. On a :

$$\left| \langle [f], \varphi_n \rangle \right| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \left| \varphi_n(x) \right| \, \mathrm{d}x$$

$$\left| \langle [f], \varphi_n \rangle \right| \leqslant \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{(1 + x^2)^{N+1}} (1 + x^2)^{N+1} \left| \varphi_n(x) \right| \, \mathrm{d}x$$

Posons $M_n = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} (1 + x^2)^{N+1} \left| \varphi_n(x) \right|$ qui est fini. En utilisant la majoration :

$$|f(x)| \leqslant c(1 + x^2)^N$$

on a :

$$\left| \langle [f], \varphi_n \rangle \right| \leqslant c M_n \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x^2)} = \text{Cte } M_n$$

Comme, par hypothèse, M_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini, le résultat s'en déduit.♦

On peut également montrer le résultat suivant.

Proposition

Les fonctions de $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ pour $p \geqslant 1$ définissent des distributions tempérées.

Un autre cas intéressant est le suivant, la démonstration étant tout à fait identique à la démonstration précédente.

Proposition

Si la suite $\{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de nombres complexes est à croissance lente, soit

$$\exists c > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{t.q.} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \left| y_n \right| \leqslant c(1 + n^2)^N$$

alors la distribution :

$$T = \sum_{n \in \mathbb{Z}} y_n \delta_{na} \quad (a > 0 \text{ donné})$$

est une distribution tempérée.

En particulier le peigne de Dirac est une distribution tempérée.

3.4 Transformée de Fourier des distributions tempérées

Définition

Soit T une distribution tempérée c'est-à-dire $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on appelle transformée de Fourier de T la distribution tempérée notée $\hat{T}$ ou $\mathcal{F}(T)$ et définie par :

$$\langle \hat{T}, \psi \rangle = \langle T, \hat{\psi} \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Il est facile de vérifier que l'opérateur ainsi défini est bien une distribution tempérée en s'appuyant sur le fait que la transformée de Fourier est une opération interne et continue dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Cette définition est compatible avec la notion de transformée de Fourier des fonctions de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ au sens suivant.

Proposition

Pour f fonction de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ou de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, on a :

$$\widehat{[f]} = [\hat{f}]$$

Il est utile pour les formules d'inversion de définir la transformée de Fourier inverse d'une distribution tempérée. Rappelons que, pour une fonction intégrable ψ, celle-ci est définie par :

$$\overline{\mathcal{F}}(\psi)(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \mathrm{e}^{+2\mathrm{i}\pi x \lambda} \, \mathrm{d}x \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Définition

Si T est une distribution tempérée, on appelle transformée de Fourier inverse de T la distribution tempérée notée $\bar{\mathcal{F}}(T)$ et définie par :

$$\langle \bar{\mathcal{F}}(T), \psi \rangle = \langle T, \bar{\mathcal{F}}(\psi) \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

On résume, dans la proposition suivante, les principales propriétés de la transformée de Fourier des distributions tempérées. Elles se déduisent des propriétés analogues de la transformée de Fourier vérifiées sur l'argument ψ [1].

Proposition

Soit T une distribution tempérée. On a les propriétés suivantes :

— pour tout entier k de $\mathbb{N}$:

$$\hat{T}^{(k)} = \widehat{[(-2i\pi x)^k T]}$$

— pour tout entier k de $\mathbb{N}$:

$$\widehat{T^{(k)}} = (2i\pi\lambda)^k \hat{T}$$

— pour tout a réel fixé :

$$\widehat{\tau_a T} = e^{-2i\pi\lambda a} \hat{T}$$

— pour tout a réel fixé :

$$\tau_a \hat{T} = \widehat{[e^{2i\pi x a} T]}$$

Si T_σ désigne la symétrisée de T :

$$\mathcal{F}(T_\sigma) = [\mathcal{F}(T)]_\sigma = \bar{\mathcal{F}}(T)$$

La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est application linéaire bijective et bicontinue de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. L'application inverse est $\bar{\mathcal{F}}$ de sorte que l'on a les égalités :

$$\mathcal{F}(\bar{\mathcal{F}})(T) = \bar{\mathcal{F}}(\mathcal{F})(T) = T \quad \forall T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$$

3.5 Exemples de transformées de Fourier

$$\boldsymbol{\hat{\delta} = 1}$$

On voit souvent cette formule écrite de la façon suivante :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi t x} \delta(x) \, dx = 1$$

ce qui est incorrect mais permet de mémoriser ce résultat important. Sa vraie signification, en termes de distribution tempérée est :

$$\langle \hat{\delta}, \psi \rangle = \langle \delta, \hat{\psi} \rangle = \hat{\psi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \, dx = \langle 1, \psi \rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

Plus généralement, pour a quelconque dans $\mathbb{R}$:

$$\hat{\delta}_a = [e^{-2i\pi a\lambda}]$$

Grâce aux formules d'inversion de la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on a :

$$\widehat{[e^{2i\pi a x}]} = \delta_a$$

résultat que l'on obtient, par exemple, en écrivant :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}([e^{-2i\pi a\lambda}]) = \delta_a \text{ avec } \mathcal{F}([e^{-2i\pi a\lambda}]) &= \bar{\mathcal{F}}([e^{-2i\pi a\lambda}]_\sigma) \\ &= \bar{\mathcal{F}}([e^{2i\pi a\lambda}])\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\hat{1} = \delta$$

■ Voici une application importante en théorie du signal qui porte sur la transformée de Fourier du peigne de Dirac. La transformée de Fourier des distributions étant un opérateur continu :

$$\hat{\Delta}_a = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{\delta}_{na} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [e^{-2i\pi t n a}]$$

En comparant cette formule avec la décomposition du peigne de Dirac en séries de Fourier (cf. article [AF 144, § 2.4]), on peut écrire :

$$\Delta_a = \frac{1}{a} \hat{\Delta}_{\frac{1}{a}}$$

ou en échangeant $a \frown \frac{1}{a}$:

$$\hat{\Delta}_a = \frac{1}{a} \Delta_{\frac{1}{a}}$$

et, en particulier :

$$\hat{\Delta}_1 = \Delta_1$$

Le peigne de Dirac est invariant par la transformée de Fourier.

La formule $\hat{\Delta}_a = \frac{1}{a} \Delta_{\frac{1}{a}}$ appliquée à une fonction $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ donne :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}(na) = \frac{1}{a} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi\left(\frac{n}{a}\right) \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

C'est la **formule sommatoire de Poisson**.

■ Afin d'illustrer le maniement de toutes ces propriétés, montrons comment elles permettent de déterminer la transformée de Fourier de la distribution $vp\left(\frac{1}{x}\right)$.

Il faut tout d'abord vérifier que cette distribution est bien une distribution tempérée.

Soit $\{\varphi_n\}_n$ une suite de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui converge vers 0 dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. On écrit :

$$\left\langle vp\left(\frac{1}{x}\right), \varphi_n \right\rangle = \int_0^1 \frac{\varphi_n(x) - \varphi_n(-x)}{x} \, dx + \int_1^{+\infty} \frac{\varphi_n(x) - \varphi_n(-x)}{x} \, dx$$

On a par le théorème des accroissements finis :

$$\frac{\varphi_n(x) - \varphi_n(-x)}{x} = 2\varphi_n'(\theta_x) \text{ avec } \theta_x \in [-x, x]$$

Comme $\{\varphi'_n\}_n$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{\varphi_n(x)-\varphi_n(-x)}{x}\,\mathrm{d}x = 0$$

Pour la deuxième partie de l'intégrale, on écrit :

$$\left|\frac{\varphi_n(x)-\varphi_n(-x)}{x}\right| = \frac{|x|\,|\varphi_n(x)-\varphi_n(-x)|}{x^2}$$

On pose ensuite :

$$M_n = \sup_{z\in\mathbb{R}}|z\varphi_n(z)| < +\infty$$

On a alors :

$$\left|\int_1^{+\infty}\frac{\varphi_n(x)-\varphi_n(-x)}{x}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant 2M_n^{1,1}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Cte}\ M_n^{1,1}$$

Par hypothèse, M_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini, donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{\varphi_n(x)-\varphi_n(-x)}{x}\,\mathrm{d}x = 0$$

Pour calculer la transformation de Fourier de $vp\left(\frac{1}{x}\right)$, on part de la formule :

$$x\,.\,vp\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

En utilisant la formule de dérivation :

$$(\hat{T})' = \widehat{[(-2\mathrm{i}\pi x)T]}$$

sous la forme :

$$\widehat{x\,.\,T} = \left(\frac{1}{-2\mathrm{i}\pi}\right)(\hat{T})'$$

on en déduit :

$$\mathcal{F}\left[x\,.\,vp\left(\frac{1}{x}\right)\right] = \left(\frac{1}{-2\mathrm{i}\pi}\right)\left(\mathcal{F}\left[vp\left(\frac{1}{x}\right)\right]\right)' = \hat{1} = \delta$$

et donc :

$$\left(\mathcal{F}\left[vp\left(\frac{1}{x}\right)\right]\right)' = (-2\mathrm{i}\pi)\delta$$

Comme, d'autre part, l'on sait que $H' = \delta$, on en déduit (cf. article [AF 144, § 5.3]) que :

$$\mathcal{F}\left[vp\left(\frac{1}{x}\right)\right] = (-2\mathrm{i}\pi)H + \mathrm{Cte}$$

Pour déterminer la constante, on remarque que $vp\left(\frac{1}{x}\right)$ est une distribution impaire, donc sa transformée de Fourier aussi. En notant K la constante cherchée :

$$\left\langle \mathcal{F}\left[vp\left(\frac{1}{x}\right)\right], \psi(-x)\right\rangle = (-2\mathrm{i}\pi)\int_0^{\infty}\psi(-x)\,\mathrm{d}x + K\int_{-\infty}^{\infty}\psi(-x)\,\mathrm{d}x$$

$$= (-2\mathrm{i}\pi)\int_{-\infty}^{0}\psi(x)\,\mathrm{d}x + K\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\,\mathrm{d}x \text{ par le changement } x \curvearrowright -x$$

De l'égalité :

$$\left\langle \mathcal{F}\left[vp\left(\frac{1}{x}\right)\right], \psi(-x)\right\rangle = -\left\langle \mathcal{F}\left[vp\left(\frac{1}{x}\right)\right], \psi(x)\right\rangle$$

on déduit :

$$(-2\mathrm{i}\pi)\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\,\mathrm{d}x = 2K\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\,\mathrm{d}x$$

et $K = \mathrm{i}\pi$. Donc :

$$\mathcal{F}\left[vp\left(\frac{1}{x}\right)\right] = (-2\mathrm{i}\pi)H + \mathrm{i}\pi$$

En remarquant que :

$$1 - 2H(x) = \mathbf{Sign}(x)$$

on a finalement :

$$\mathcal{F}\left[vp\left(\frac{1}{x}\right)\right] = -\mathrm{i}\pi\,\mathbf{Sign}\,(x)$$

Par transformée de Fourier inverse et en utilisant l'imparité de $vp\left(\frac{1}{x}\right)$, on obtient :

$$\mathcal{F}\,[\mathbf{Sign}\,(x)] = \frac{1}{\mathrm{i}\pi}\,vp\left(\frac{1}{x}\right)$$

3.6 Transformée de Fourier dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$

Proposition

Le prolongement d'une distribution à support compact est une distribution tempérée, ce que l'on peut traduire par :

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$$

En effet, si $K = \mathbf{Supp}(T)$ pour T dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ et si θ est une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui vaut 1 sur K, le prolongement de T à $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ était défini par :

$$\langle T, \psi\rangle = \langle T, \theta\psi\rangle \quad \forall\psi\in\mathcal{E}(\mathbb{R})$$

Si $\{\varphi_n\}_n$ est une suite de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui converge vers 0 dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, la suite $\{\theta\varphi_n\}_n$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et donc $\langle T, \varphi_n\rangle$ converge vers 0 quand n tend vers l'infini.

Si T est une distribution à support compact, sa transformée de Fourier est bien définie. Elle possède la propriété particulière suivante.

Théorème

Le prolongement d'une distribution T à support compact a une transformée de Fourier qui est une distribution régulière associée à la fonction à croissance lente :

$$s(\lambda) = \langle T_x, \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\lambda x}\rangle \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

Pour tout entier k dans $\mathbb{N}$, on a la formule de dérivation suivante :

$$s^{(k)}(\lambda) = \langle T_x, (-2\mathrm{i}\pi x)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\lambda x}\rangle \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}$$

3.7 Convolution et transformée de Fourier

Comme pour les fonctions, la transformée de Fourier échange convolution et multiplication, soit :

$$\begin{cases} \widehat{T * U} = \hat{T} \,.\, \hat{U} \\ \widehat{T \,.\, U} = \hat{T} * \hat{U} \end{cases}$$

Mais, comme pour les fonctions, il faut prendre garde aux conditions de validité de ces formules ! On sait notamment que le produit des distributions n'est défini que dans certains cas, notamment si l'une des distributions est régulière. Voici quelques cas importants de validité des ces formules.

Proposition

i) Si $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ et $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{cases} \widehat{\psi * T} = \hat{\psi} \,.\, \hat{T} \\ \quad\text{et} \\ \widehat{\psi \,.\, T} = \hat{\psi} * \hat{T} \end{cases}$$

ii) Pour $\mathscr{S} \in \mathscr{E}'(\mathbb{R})$ et $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$, on a :

$$\widehat{S * T} = \hat{S} \,.\, \hat{T}$$

Les ouvrages généraux [4] [5] sont des références anciennes mais particulièrement utiles pour des ingénieurs.

Références bibliographiques

[1] GASQUET (C.) et WITOMSKI (P.). – *Analyse de Fourier et applications. Filtrage – Calcul Numérique – Ondelettes.* 354 p. – Masson – Paris (1990).

[2] HERVÉ (M.). – *Transformation de Fourier et distributions.* 182 p. – PUF – Paris (1986).

[3] SAICHEV (A.I.) et WOYCZYNSKI (W.A.). – *Distributions in the physical and engineering sciences. Volume 1. Distributional and fractal calculus, integral transforms and wavelets.* 336 p. – Birkhäuser – Boston (1997).

[4] SCHWARTZ (L.). – *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques.* 390 p. Herman-Paris (1965).

[5] RODDIER (F.). – *Distributions et transformation de Fourier.* 323 p. – Ediscience International – Paris (1978).