# Topologie et mesure

par **Gilles GODEFROY**
*Directeur de recherches*
*au Centre national de la recherche scientifique CNRS*



*Cet article constitue un préliminaire à l'analyse fonctionnelle puisqu'il s'agit de l'étude de la topologie et de la mesure. Pour cela, il faut faire connaissance avec les concepts qui éclairent la formalisation : espaces métriques, espaces complets, espaces compacts, espaces normés et espaces de Banach. Les espaces normés de dimension finie, les espaces de Hilbert et les espaces de Banach non euclidiens font l'objet de l'article suivant [AF 100].*

# 1. Espaces métriques. Espaces complets

Soit E un ensemble. Une *distance d* sur E est une application :

$$d : E \times E \to [0, +\infty[$$

qui vérifie les trois conditions suivantes :

(i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ pour tous *x* et *y*.

(iii) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ pour tous *x*, *y* et *z*.

La quantité $d(x, y)$ est appelée la distance entre *x* et *y*. Un *espace métrique* est un couple $(E, d)$, où *d* est une distance sur E, c'est-à-dire un ensemble E muni d'une métrique *d*.

**Exemples :** Soit $E = \mathbb{R}$ ; $d(x, y) = |x - y|$ est la ***distance ou métrique usuelle*** sur $\mathbb{R}$.

Plus généralement, si $E = \mathbb{R}^n$ et $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sont deux éléments de $\mathbb{R}^n$, et si on pose :

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

alors $d_2$ est la ***distance euclidienne*** sur $\mathbb{R}^n$ (cf. [AF 100, § 2]).

Il est clair qu'un sous-ensemble d'un espace métrique est un espace métrique par restriction de la distance.

Soit $(x_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de points de E. On dit que $(x_n)_{n \geqslant 0}$ *converge* vers $x \in E$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, alors :

$$d(x_n, x) < \varepsilon$$

On dit que la suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ est de *Cauchy* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $p \geqslant q \geqslant N$, alors :

$$d(x_p, x_q) < \varepsilon$$

C'est une conséquence facile de la propriété (iii) des distances (l'« inégalité triangulaire ») que toute suite convergente est de Cauchy.

La réciproque est vraie dans certains espaces métriques, mais pas dans tous, d'où la définition suivante.

**Définition** : un espace métrique $(E, d)$ est **complet** si toute suite de Cauchy d'élément de E converge dans E.

**Exemple :** $\mathbb{R}$ est complet pour sa distance naturelle, mais l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels ne l'est pas.

Il est utile de savoir que tout espace métrique peut-être *complété* : étant donné $(E, d)$ métrique, il existe un espace métrique complet $(\hat{E}, \hat{d})$ et une injection isométrique $j : E \to \hat{E}$ telle que $j(E)$ soit dense dans $\hat{E}$ – c'est-à-dire que tout point de $\hat{E}$ est limite d'une suite de points de $j(E)$. Cette propriété définit $\hat{E}$ à une isométrie près et on l'appelle donc le *complété* de E.

**Exemple :** le plus simple, c'est $\hat{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ ; cette équation répond au problème de l'irrationalité mentionné dans l'historique. Les espaces fonctionnels fournissent des exemples plus profonds, que nous verrons par la suite.

Une distance *d* sur un ensemble E munit cet ensemble d'une *topologie*, en d'autres termes d'une collection de sous-ensembles ouverts, suivant la définition suivante.

**Définition** : soit $(E, d)$ un espace métrique. Un sous-ensemble V de E est dit **ouvert** si pour tout $x \in V$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que la boule :

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in E, d(x, y) < \varepsilon\}$$

soit incluse dans V.

Un sous-ensemble F de E est dit *fermé* si quand $(x_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite dans F qui converge vers *x* (on écrit alors $x = \lim_{n \to \infty} (x_n)$), on a $x \in F$. Il est facile de voir que F est fermé si et seulement si son complémentaire $(E \setminus F)$ est ouvert.

Une fonction *f* d'un espace métrique E dans un espace métrique F est *continue* quand on a :

$$\lim_{n \to \infty} (x_n) = x \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x)$$

On vérifie aisément que *f* est continue si et seulement si $f^{-1}(V)$ est ouvert dans E pour tout sous-ensemble ouvert V de F.

Remarquons que toute réunion d'ouverts est ouverte, et donc que toute intersection de fermés est fermée.

Cela permet de définir l'*adhérence* $\bar{A}$ d'un ensemble A comme le plus petit fermé contenant A ; il est clair que $\bar{A}$ est aussi l'ensemble des limites de suites d'éléments de A.

Les distances permettent de formaliser, dans de nombreux cas, le concept de limite. En toute généralité, elles ne suffisent cependant pas.

**Exemple :** une suite $(f_n)_{n \geqslant 0}$ de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ converge simplement vers *f* si pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) \quad \textbf{(1)}$$

On montre qu'il n'existe pas de distance *d* sur l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'équation (1) soit équivalente à $\lim d(f_n, f) = 0$. On peut cependant définir (et utiliser) la topologie de la convergence simple. Mais cette notion importante dépasse le cadre de cet exposé.

**Quelques éléments historiques**

La topologie générale est une branche des mathématiques qui s'est développée, et axiomatisée, au cours du vingtième siècle. Son développement répondait à divers besoins de l'analyse et des fondements de la géométrie.

Esquissons brièvement quelques points d'histoire.

On peut considérer que le tout premier besoin de cet ordre s'est manifesté lors de la découverte des nombres irrationnels par les mathématiciens grecs. Cette découverte est impossible à dater avec précision, mais est certainement antérieure à Platon puisque les rapports incommensurables étaient explicitement étudiés dans son École, en particulier par Théodore de Cyrène. L'irrationalité a confronté les Anciens à un délicat problème d'existence, puisque les rapports incommensurables pouvaient être approximés avec une précision arbitraire mais jamais parfaite.

L'analyse mathématique, au sens que nous donnons aujourd'hui à ce terme, n'existait pas alors. En géomètres et philosophes, les Grecs ont répondu au défi de l'irrationalité en ramenant les questions d'existence (et peut-être de calcul) des rapports irrationnels aux constructions à la règle et au compas, et en créant une théorie des grandeurs, attribuée à Eudoxe, dès la première moitié du quatrième siècle avant Jésus-Christ.

Les constructions géométriques se sont révélées insuffisantes puisqu'elles ne permettent pas, par exemple, de construire deux segments de droite dont le rapport des longueurs soit égal à $\pi$. C'est là une forme équivalente du problème de la quadrature du cercle, mais il a fallu attendre 1882 pour que Lindemann prouve (par des méthodes analytiques) l'impossibilité de cette quadrature. La théorie des grandeurs d'Eudoxe s'est par contre montrée remarquablement moderne, puisqu'elle a été reprise par Dedekind lorsqu'il a montré en 1858 comment construire la droite réelle « standard » par la méthode des coupures. C'est cette droite réelle, munie de son caractère archimédien (nous devrions dire « eudoxéen » puisqu'Archimède lui-même faisait référence à Eudoxe), qui sert de base à l'analyse moderne. Rappelons en effet qu'Eudoxe énonce qu'« étant données deux grandeurs non nulles, il y a toujours un multiple de la première qui excède la deuxième » ; cet axiome interdit donc l'existence de quantités infiniment petites ou infiniment grandes. La droite réelle archimédienne modélise, de façon satisfaisante pour l'intuition, le continu géométrique. Sa construction permet d'étudier avec rigueur et précision la droite et ses sous-ensembles.

Les sous-ensembles du plan ou de l'espace sont plus difficiles à étudier, d'un point de vue géométrique, que ceux de la droite. Cette difficulté est apparue clairement lorsque les progrès de l'analyse ont amené les mathématiciens à considérer des fonctions de plus en plus générales, et les graphes correspondants. Il a fallu alors définir formellement ce que c'est qu'une limite, qu'une fonction continue ou dérivable, et donner un (ou plutôt, des) sens précis à la convergence d'une suite de fonctions vers sa limite. Ces tentatives de formalisation ont commencé dès le début du dix-neuvième siècle, en particulier dans le Cours écrit par Cauchy pour l'École Polytechnique. Les exemples pathologiques, comme la fonction continue nulle part dérivable découverte par Weierstrass en 1872, ont souligné le caractère indispensable de cette formalisation. De nos jours, les figures fractales illustrent merveilleusement la complexité des ensembles plans homothétiques à l'une de leurs parties, que certains mathématiciens (Poincaré, Julia, Sierpinski...) avaient conçus dès le début du vingtième siècle, sans pouvoir les dessiner. Ces formes tourmentées nous montrent clairement que, par exemple, la définition d'une fonction continue comme « fonction dont on peut tracer le graphe sans lever le crayon » est très insuffisante.

# 2. Espaces compacts

Une fonction bornée, définie sur un ensemble E et à valeurs réelles n'atteint pas en général ses bornes, ce qui oblige à manipuler des « $\varepsilon$ », c'est-à-dire des termes d'erreur, dans de nombreux calculs. La compacité d'un espace métrique permet d'éviter ce problème.

**Définition** : soit $(\mathrm{E}, d)$ un espace métrique. L'espace $(\mathrm{E}, d)$ est dit **compact** si lorsqu'on écrit E comme une réunion de sous-ensemble ouverts $(\mathrm{V}_i)$ :

$$\mathrm{E} = \bigcup_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{V}_i$$

Il existe une sous-famille finie $\mathrm{V}_{i_1}, \mathrm{V}_{i_2}, \ldots, \mathrm{V}_{i_n}$ telle que :

$$\mathrm{E} = \bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{V}_{i_k}$$

En d'autres termes, de tout recouvrement ouvert on peut extraire un sous-recouvrement fini. Voici deux propriétés importantes de ces espaces.

**Proposition 1** : soit $(\mathrm{E}, d)$ un espace métrique compact. Si $(\mathrm{F}_n)$ est une suite décroissante de sous-ensembles fermés non vides de E, alors $\bigcap_{n \geqslant 0} \mathrm{F}_n \neq \varnothing$. En particulier, tout espace compact est complet.

**Preuve** ♦

L'ensemble $\mathrm{V}_n = \mathrm{E} \setminus \mathrm{F}_n$ est ouvert. Si $\bigcap_{n \geqslant 0} \mathrm{F}_n = \varnothing$, on a $\mathrm{E} = \bigcup_{n \geqslant 0} \mathrm{V}_n$.

Par compacité, on a donc :

$$\mathrm{E} = \mathrm{V}_{n_1} \cup \mathrm{V}_{n_2} \cup \ldots \cup \mathrm{V}_{n_k}$$

mais comme la suite $(\mathrm{F}_n)$ est décroissante, il s'ensuit que $\mathrm{E} = \mathrm{V}_\ell$, où $\ell = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ et cela contredit $\mathrm{F}_\ell \neq \varnothing$.

Si $(x_k)_{k \geqslant 0}$ est une suite de Cauchy, on considère :

$$\mathrm{F}_n = \overline{\{x_k\ ;\ k \geqslant n\}}$$

Il est clair que $\mathrm{F}_n \neq \varnothing$ et que $\mathrm{F}_{n+1} \subseteq \mathrm{F}_n$, donc $\bigcap_{n \geqslant 0} \mathrm{F}_n \neq \varnothing$. Soit $x \in \bigcap_{n \geqslant 0} \mathrm{F}_n$ ; pour tout $n \geqslant 0$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $k > n$ tel que $d(x, x_k) < \varepsilon$. Comme la suite $(x_k)_{k \geqslant 0}$ est de Cauchy, il s'ensuit facilement que $x = \lim_{k \to \infty} (x_k)$. ♦

**Proposition 2** : soit $(\mathrm{E}, d)$ et $(\mathrm{F}, d')$ deux espaces métriques, et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application continue. Si E est compact, alors $f(\mathrm{E})$ est une partie compacte de F.

**Preuve** ♦

Soit $(\mathrm{V}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une famille d'ouverts de F telle que :

$$f(\mathrm{E}) \subseteq \bigcup_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{V}_i$$

On a :

$$\mathrm{E} = \bigcup_{i \in \mathrm{I}} f^{-1}(\mathrm{V}_i)$$

Comme $f$ est continue, $f^{-1}(V_i)$ est ouvert dans E. Par compacité, il existe $\{i_1, i_2, ..., i_n\}$ tels que :

$$E = \bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(V_{i_k})$$

et on a donc $f(E) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} V_{i_k}$. Nous avons montré que $f(E)$ est compact. ♦

La famille fondamentale des parties compactes nous est donnée par un théorème montré par E. Borel et H. Lebesgue au début du vingtième siècle : *les parties compactes de* $\mathbb{R}$ *sont les parties fermées bornées*. Avec la proposition **2** cela nous montre le corollaire suivant.

**Corollaire 1** : soit $(E, d)$ un espace métrique compact. Toute fonction continue $f : E \to \mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

Si $(E_1, d_1), (E_2, d_2), ..., (E_n, d_n)$ sont des espaces métriques, le produit $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ est un espace métrique pour la distance :

$$d\Big((x_i), (y_i)\Big) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)$$

Lorsque les $E_i$ sont tous égaux à $\mathbb{R}$, on définit ainsi une distance sur $\mathbb{R}^n$, qui est équivalente à la distance euclidienne $d_2$ et qui définit la topologie naturelle de $\mathbb{R}^n$.

On montre qu'un produit d'espaces compacts est compact. Il s'ensuit que le théorème de Borel-Lebesgue s'étend ainsi : *les parties compactes* de $\mathbb{R}^n$ sont des *parties fermées bornées*. Nous verrons que cet énoncé caractérise les espaces de dimensions finies (cf. [AF 100, théorème 4]).

# 3. Lemme de Baire dans les espaces métriques complets

Le lemme suivant à été montré par R. Baire, dans le cadre des espaces $\mathbb{R}^n$, peu avant 1900. La démonstration de Baire s'étend sans peine au cas général.

Une partie D d'un espace métrique E est dense si $\bar{D} = E$, ou de façon équivalente si tout ouvert non vide de E rencontre D.

**Lemme 1** : soit $(E, d)$ un espace métrique complet. Soit $(V_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de sous-ensembles ouverts denses de E. Alors $\Omega = \bigcap_{n \geqslant 0} V_n$ est **dense**.

**Preuve ♦**

Soient $x \in E, \varepsilon > 0$ et $B(x, \varepsilon)$ la boule ouverte de centre $x$ et de rayon $\varepsilon$. On a $V_0 \cap B(x, \varepsilon) \neq \varnothing$. Soit $x_0 \in V_0 \cap B(x, \varepsilon)$ et soit $\varepsilon_0 \in ]0, 1[$ tel que :

$$B(x_0, \varepsilon_0) \subseteq V_0 \cap B(x, \varepsilon) \tag{2}$$

On a $V_1 \cap B(x_0, \varepsilon_0/2) \neq \varnothing$. Soit donc $x_1 \in V_1 \cap B(x_0, \varepsilon_0/2)$, et $\varepsilon_1 \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que l'on ait pour $k = 1$ l'inclusion :

$$B(x_k, \varepsilon_k) \subseteq V_k \cap B\left(x_{k-1}, \frac{\varepsilon_{k-1}}{2}\right) \tag{3}$$

On poursuit par récurrence en prenant $x_k \in V_k \cap B\left(x_{k-1}, \frac{\varepsilon_{k-1}}{2}\right)$ et $\varepsilon_k \in \left]0, \frac{1}{2^k}\right[$ tels que l'équation (3) soit satisfaite pour tout $k \geqslant 1$.

On a clairement $d(x_n, x_{n-1}) \leqslant 2^{-n}$ et donc $d(x_n, x_k) \leqslant 2^{-k}$ si $n > k$, par l'inégalité triangulaire. La suite $(x_k)$ est donc de Cauchy.

Soit :

$$x = \lim_{k \to \infty} x_k$$

D'après l'équation (3) on a :

$$x_n \in B(x_k, \varepsilon_k/2)$$

pour tout $n > k \geqslant 0$, et donc :

$$x \in \overline{B(x_k, \varepsilon_k/2)} \subseteq B(x_k, \varepsilon_k)$$

ce qui montre d'après les équations (2) et (3) que $x \in B(x, \varepsilon) \cap \Omega$, et donc que l'ensemble $\Omega$ est dense. ♦

Le lemme **1** implique bien sûr que $\Omega$ est non vide, et c'est souvent sous cette forme que le lemme de Baire est employé.

Ce lemme est très utile pour établir des propriétés d'uniformité ou de régularité cachées. Citons sans démonstration deux résultats élémentaires de ce type :

**Exemple 1** : soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction partout dérivable. Alors la dérivée $f'$ est continue en tout point d'un sous-ensemble dense $\Omega$ de $\mathbb{R}$. Donc, si la tangente à un graphe existe partout, il y a de nombreux points où cette tangente varie continuement.

**Exemple 2** : soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathscr{C}^\infty$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $n(x) \in \mathbb{N}$ tel que la dérivée $(f^{n(x)})$ de $f$ d'ordre $n(x)$ s'annule en $x$. Alors $f$ est une fonction polynomiale ; donc, il y a un entier $n \in \mathbb{N}$ qui marche pour tous les points $x \in \mathbb{R}$.

# 4. Théorie de la mesure et intégration

Le calcul des surfaces, donc de la mesure de sous-ensembles simples du plan, est aussi ancien que l'agriculture et remonte donc aux mathématiques les plus archaïques. Les parties du plan dont l'aire est la plus facile à calculer sont les polygones ; il suffit en effet de les écrire comme réunion disjointe (aux côtés près) de triangles et de faire la somme des aires de ces triangles. Lorsque l'on doit mesurer des surfaces plus compliquées, il est naturel de les encadrer entre deux polygones « interne » et « externe » dont la différence des aires est assez petite. C'est ainsi que procède Archimède pour calculer l'aire du disque ou l'aire limitée par une parabole et une corde.

Cette idée géométrique simple est à la base de la théorie de la mesure, telle que H. Lebesgue et ses émules l'ont développée à partir de 1901. Il faut attribuer une « mesure » (longueur, surface, volume...) $m_n(A)$ à une partie A de $\mathbb{R}^n$ aussi générale que possible, de façon à ce que les propriétés suivantes soient satisfaites :

(i) si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ est un pavé ouvert de la forme $A = ]a_1, b_1[ \times ]a_2, b_2[ \times ... \times ]a_n, b_n[$, alors :

$$m_n(A) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)...(b_n - a_n)$$

(ii) si A et B sont deux parties mesurables disjointes, alors :

$$m_n(A \cup B) = m_n(A) + m_n(B)$$

(iii) si $T$ est une isométrie de $\mathbb{R}^n$, alors $m_n(T(A)) = m_n(A)$ pour toute partie A mesurable.

La condition (iii) exprime que le volume d'une partie « solide » de $\mathbb{R}^n$ ne dépend pas de sa position. Les conditions (i) et (ii) sont les propriétés naturelles d'une surface ou d'un volume.

Il n'existe pas de fonction d'ensemble définie sur *toutes* les parties de l'espace $\mathbb{R}^3$ qui vérifie les conditions (i), (ii) et (iii). On peut cependant attribuer une mesure à toutes les parties « concrètes », en un sens très large.

Expliquons la construction dans le cas où $n = 1$. Un ouvert $\mathrm{U}$ de $\mathbb{R}$ est une réunion disjointe d'intervalles ouverts :

$$\mathrm{U} = \bigcup_i \,]a_i, b_i[$$

et cette représentation est unique.

On définit alors :

$$m(\mathrm{U}) = \sum_i (b_i - a_i)$$

Si E est une partie quelconque de $\mathbb{R}$, on définit la *mesure extérieure* $m^*(\mathrm{E})$ de E par la formule :

$$m^*(\mathrm{E}) = \inf\{m(\mathrm{U})\ ;\ \mathrm{U} \text{ ouvert, } \mathrm{E} \subseteq \mathrm{U}\}$$

Suivant Lebesgue, on dit qu'une partie E de $[a, b]$ est *mesurable* si :

$$m^*(\mathrm{E}) + m^*([a, b] \setminus \mathrm{E}) = b - a$$

Cette dernière condition veut dire qu'un ensemble mesurable E est contenu dans un ouvert $\mathrm{U}$ et contient un fermé F tels que $\mathrm{U}$ et F aient presque la même mesure. Après avoir étendu la définition de la mesurabilité aux parties non bornées de $\mathbb{R}$, puis $\mathbb{R}^n$, Lebesgue montre le théorème fondamental suivant.

**Théorème 1** : l'ensemble $\mathcal{M}_n$ des parties mesurables de $\mathbb{R}^n$ contient les ouverts et est stable par réunion dénombrable, intersection dénombrable et passage au complémentaire. Il existe une application :

$$m_n : \mathcal{M}_n \to [0, +\infty]$$

Qui vérifie (i), (ii), (iii), et qui est plus $\sigma$ – additive, au sens suivant.

(iv) Pour toute suite $(\mathrm{A}_k)_{k \geqslant 0}$ de parties mesurables disjointes, on a :

$$m_n\left(\bigcup_{k \geqslant 0} \mathrm{A}_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} m_n(\mathrm{A}_k)$$

Toutes les parties de $\mathbb{R}^n$ que l'on peut exhiber sans utiliser l'axiome du choix appartiennent à l'ensemble $\mathcal{M}_n$ des parties mesurables au sens de Lebesgue. Le théorème 1 suffit donc à tous les besoins de l'analyse concrète.

La mesure $m_n$ permet de calculer l'intégrale de fonctions très générales de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ : si $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n$, on note $\mathbb{1}_{\mathrm{A}}$ la fonction indicatrice de A, définie par : $\mathbb{1}_{\mathrm{A}}(x) = 1$ si $x \in \mathrm{A}$, $\mathbb{1}_{\mathrm{A}}(x) = 0$ si $x \notin \mathrm{A}$. Une *fonction étagée* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction de la forme :

$$g(x) = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \mathbb{1}_{\mathrm{A}_k}(x) \tag{4}$$

On définit son intégrale sur $\mathbb{R}^n$ par la formule :

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k m_n(\mathrm{A}_k) \tag{5}$$

qui ne dépend que de $g$ d'après les propriétés de $m_n$. Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite *mesurable* si $f^{-1}(]a, b[) \in \mathcal{M}_n$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Si $f \geqslant 0$ est mesurable, on définit son intégrale ainsi :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\mathrm{d}t = \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^n} g(t)\mathrm{d}t\ ;\ 0 \leqslant g \leqslant f,\ g \text{ étagée}\right\}$$

il se peut bien sûr que ce suprémum soit égal à $+\infty$. S'il est fini, on dira que $f$ est *intégrable*.

Si $f$ mesurable est à valeurs réelles quelconques, on pose :

$$f^+ = \max(f, 0)\ ;\ f^- = -\min(f, 0).$$

les fonctions $f^+$ et $f^-$ sont mesurables.

On dit que $f$ est intégrable si $f^+$ et $f^-$ le sont et on pose :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(t)\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}^n} f^+(t)\mathrm{d}t - \int_{\mathbb{R}^n} f^-(t)\mathrm{d}t$$

Notons que cette définition montre que $f$ est intégrable si et seulement si $|f|$ est intégrable. On vérifie que l'intégrale ainsi définie est linéaire en $f$, et à l'aide de la $\sigma$ – additivité de la mesure, on montre les très utiles théorèmes suivants.

**Théorème 2** : soit $(f_k)$ une suite de fonctions mesurables de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\lim_{k \to \infty} f_k(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

On suppose qu'il existe une fonction $F$ intégrable telle que :

$$|f_k(x)| \leqslant |F(x)|$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Alors $f$ est intégrable et l'on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\mathrm{d}x$$

Ce « théorème de convergence dominée » énonce donc que sous une condition de domination, on peut intervertir la limite ponctuelle et l'intégrale.

**Théorème 3** : soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. On a l'égalité :

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(t)\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

Ce théorème dit « de Fubini » affirme qu'on peut calculer une intégrale dans $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^n$) en effectuant les intégrations successives dans un ordre arbitraire. Notons que l'on note traditionnellement une intégrale sur $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^n$) par une intégrale double (ou multiple) ; cette tradition, que nous ne suivons pas ici, ne facilite pas les calculs.

La puissance de la méthode d'intégration de Lebesgue s'explique en partie par une idée simple : au lieu de diviser « verticalement » comme dans la méthode de Riemann, on divise « horizontalement » en exploitant le fait que l'on peut mesurer des ensembles très généraux, donc en particulier les $f^{-1}(]a, b[)$. Cette méthode, qui met l'accent sur la *distribution* de la fonction $f$ et fait disparaître la variable d'intégration, constitue le point de vue moderne sur l'intégration.

# 5. Espaces normés. Espaces de Banach

En géométrie élémentaire, on définit la *norme* d'un vecteur comme étant égale à sa longueur. Le calcul vectoriel s'étend sans difficulté à des espaces fonctionnels très généraux et il est utile de pouvoir utiliser la notion de norme d'une fonction, d'un opérateur, d'une forme linéaire... La structure d'espace normé que nous définissons maintenant est fondamentale lorsque l'on veut appliquer à l'analyse des idées géométriques.

**Définition 1** : soit E un espace vectoriel. Une **norme** $N$ sur E est une application $N : \mathrm{E} \to [0, +\infty[$ qui vérifie les propriétés suivantes :

(i) $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(ii) $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ pour tout $x \in \mathrm{E}$ et tout scalaire $\lambda$.

(iii) $N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$ pour tout couple $(x, y) \in \mathrm{E}^2$.

Un *espace normé* est un couple $(\mathrm{E}, N)$, où $N$ est une norme sur E. La notation $\|x\|$ est souvent utilisée pour désigner la norme d'un vecteur $x$.

Une norme $N$ permet de définir une distance $d$ sur E, par l'équation :

$$d(x, y) = N(x-y)$$

On peut donc parler de suite de Cauchy et de suites convergentes dans un espace normé. La définition ci-après permet d'appliquer aux espaces fonctionnels les idées topologiques décrites dans le paragraphe 1.

**Définition 2** : un espace normé $(\mathrm{E}, N)$ est un **espace de Banach** s'il est complet pour la distance associée à $N$, donc si toute suite de Cauchy d'éléments de E converge dans E.

**Exemples :**

1) Sur l'espace $\mathbb{R}^n$, on peut considérer les normes suivantes. Si $v = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose :

$$\|v\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\|v\|_\infty = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$$

$$\|v\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \qquad (1 \leqslant p < \infty)$$

La *norme euclidienne* $\|\cdot\|_2$ définit la longueur géométrique usuelle du vecteur $v$ (cf. [AF 100, § 1]). Toutes ces normes sont équivalentes et définissent la structure métrique produit usuelle sur $\mathbb{R}^n$.

2) Soit K un espace compact et soit $\mathrm{X} = \mathscr{C}(\mathrm{K})$ l'espace des fonctions continues de K de $\mathbb{R}$. Si on pose :

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \; ; \; x \in \mathrm{K}\}$$

on fait de $\left(\mathscr{C}(\mathrm{K}), \|.\|_\infty\right)$ un espace de Banach. La norme $\|\cdot\|_\infty$ est appelée *norme de la convergence uniforme* sur K.

3) Soit $\mathscr{L}_1(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions intégrales de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On définit une relation d'équivalence $\simeq$ sur $\mathscr{L}_1(\mathbb{R}^n)$ par :

$$f \simeq g \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} |f(t) - g(t)| \, \mathrm{d}t = 0$$

On note $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^n)$ l'espace quotient formé des classes d'équivalence. Si $f \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R}^n)$, les éléments de la classe de $f$ sont obtenus en modifiant $f$ sur un ensemble de mesure nulle ; on considère le plus souvent les éléments de $\mathrm{L}_1$ comme des fonctions, mais il faut comprendre que l'on ne change pas $f$ en tant qu'élément de $\mathrm{L}_1$ si on la modifie sur un ensemble de mesure nulle. Pour $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^n)$, on pose :

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)| \, \mathrm{d}t$$

L'un des grands avantages de la théorie de Lebesgue est que l'espace $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_1$ est *complet*.

Si $p \in [1, +\infty[$, on définit :

$$\mathrm{L}_p(\mathbb{R}^n) = \left\{f \; ; \; f^p \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^n)\right\}$$

qui est complet pour la norme :

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^p \, \mathrm{d}t\right)^{1/p}$$

Le cas $p = 2$ est particulièrement important puisqu'il définit l'*espace de Hilbert* (cf. [AF 100], § 2). Enfin, on définit sur l'espace $\mathrm{L}_\infty(\mathbb{R}^n)$ des classes de fonctions mesurables bornées la norme :

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &= \sup\{t > 0 \; ; \; m_n(\{|f| > t\}) > 0\} \\ &= \inf\{s > 0 \; ; \; m_n(\{|f| > s\}) = 0\} \end{aligned}$$

Une fonction $f \in \mathrm{L}_\infty(\mathbb{R}^n)$ peut être modifiée sur un ensemble de mesure nulle pour être à valeurs dans $[-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty]$. L'espace $(\mathrm{L}_\infty(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ est lui aussi complet.

4) Si $1 \leqslant p < \infty$, l'espace $\ell_p(\mathbb{N})$ est l'ensemble des suites $(x_n)_{n \geqslant 0}$ de nombres réels telles que :

$$\|(x_n)\|_p = \left[\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p\right]^{1/p} < +\infty$$

L'espace $\ell_p(\mathbb{N})$ muni de la norme $\|\cdot\|_p$ est un espace de Banach, qui constitue un analogue discret de l'espace $\mathrm{L}_p(\mathbb{R}^n)$. Nous verrons en [AF 100, § 2] que lorsque $p = 2$, les espaces $\ell_2(\mathbb{N})$ et $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^n)$ sont isométriques.

Nous avons présenté tous ces exemples dans le cadre des espaces de Banach *réels*, c'est-à-dire sur le corps $\mathbb{R}$. Le cas complexe fournit des exemples complètement analogues. La considération des espaces de Banach sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes pose quelques petits problèmes géométriques (par exemple, il faut préciser ce que l'on entend par « séparation » quand le corps de base n'est pas ordonné ; cf. [AF 100, théorème 10]. Cependant, le cadre complexe est beaucoup mieux adapté à l'analyse de Fourier, à la théorie spectrale, au calcul fonctionnel, etc. Nous considérerons donc souvent des espaces de Banach complexes.