

Écoulement des fluides

Analyse dimensionnelle. Similitude

par **André LALLEMAND**

Ingénieur, Docteur ès sciences

Professeur des universités à l'Institut national des sciences appliquées de Lyon

| | |
|---|--------------|
| 1. Analyse dimensionnelle | BE 8 159 - 2 |
| 1.1 Théorème de Vaschy-Buckingham ou théorème des π | — 2 |
| 1.2 Exemple d'application..... | — 3 |
| 2. Similitude. Maquettes et prototypes | — 5 |
| 2.1 Mise en évidence des écoulements semblables..... | — 5 |
| 2.2 Conditions de similitude. Cas général..... | — 6 |
| 2.3 Conditions particulières de similitude | — 10 |
| 3. Conclusion | — 10 |

Les équations fondamentales de la mécanique des fluides et de la thermique sont le plus souvent difficiles à résoudre. Les solutions analytiques sont même rares et les solutions numériques sont parfois lourdes de mise en œuvre et coûteuses en temps de calcul. On peut alors avoir recours à l'**étude expérimentale** soit en vraie grandeur, soit par l'intermédiaire de **maquettes**. On peut aussi remplacer la résolution des équations de base, qui donne des informations locales, par des modélisations plus globales du problème. Ces modèles font appel à des **corrélations semi-empiriques** déduites d'expérimentations réalisées dans des conditions particulières, mais dont le résultat doit être extrapolable à d'autres conditions qui seront dites **semblables**.

Que les études expérimentales soient faites dans un but de connaissance d'une situation particulière ou pour établir des corrélations valables de manière plus générale, le nombre d'expériences à réaliser doit toujours être réduit au maximum. Pour cela, il est important de savoir quels paramètres caractérisent le phénomène étudié et comment ils interviennent. L'expérimentateur est aidé dans cette démarche par l'**analyse dimensionnelle**, qui permet d'accéder plus facilement à la mise en forme de relations semi-empiriques permettant de modéliser le phénomène étudié.

Lorsqu'il doit faire appel à une expérimentation sur maquette, à cause notamment de la taille géométrique du problème réel, non acceptable au niveau du laboratoire, l'expérimentateur doit respecter certaines conditions de fonctionnement liant l'étude sur la maquette et sa transposition au prototype. Ces conditions sont imposées par la théorie de la **similitude**. D'une manière plus générale, ces conditions sont nécessaires lorsque l'on veut appliquer à un problème la solution obtenue pour un autre problème réputé semblable. Cette solution, pour garder sa généralité, sera toujours donnée sous la forme d'une ou de plusieurs équations adimensionnalisées dans lesquelles apparaîtront des paramètres particuliers qui sont appelés communément : **nombres sans dimension**.

L'objet de cet article est, d'une part, de présenter la démarche de mise en forme adimensionnelle des corrélations liant un phénomène aux paramètres qui le contrôlent, d'autre part, d'explicitier les conditions nécessaires à la transposition des résultats du cas étudié expérimentalement (la maquette) au cas du problème pratique à résoudre (le prototype).

Pour les notations et symboles, se reporter en fin d'article.

1. Analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle est basée sur un principe simple de physique : la formulation d'un phénomène physique doit être **dimensionnellement homogène**, c'est-à-dire que son expression en fonction des paramètres dont il dépend doit être indépendante du système d'unités choisi et les dimensions (dans le sens « unités ») attachées à chaque monôme de l'expression doivent être analogues à la dimension du phénomène. Les dimensions étant respectées, toute expression représentant un phénomène physique peut être mise sous une forme adimensionnelle. Cette mise en forme adimensionnelle fait appel au théorème de Vaschy-Buckingham encore appelé théorème des π .

1.1 Théorème de Vaschy-Buckingham ou théorème des π

1.1.1 Énoncé

Toute grandeur physique G , fonction de p paramètres indépendants x_i mesurés par q unités fondamentales (masse, longueur, temps, température, pour les problèmes de thermomécanique) et traduisant la variation de p causes indépendantes (avec $p > q$), s'exprime à partir d'une relation de la forme :

$$\frac{G}{x_1^{g_1} x_2^{g_2} \dots x_q^{g_q}} = F(\pi_{q+1}, \pi_{q+2}, \dots, \pi_p)$$

Cette relation s'écrit encore sous forme condensée :

$$\frac{G}{\prod_{i=1}^q x_i^{g_i}} = F(\pi_{q+1}, \pi_{q+2}, \dots, \pi_p) \quad (1)$$

dans laquelle les x_1, \dots, x_q sont choisis de telle sorte qu'ils soient dimensionnellement indépendants et les π_{q+1}, \dots, π_p sont des nombres sans dimension construits à partir des paramètres x_i . En général, le choix des x_1, \dots, x_q est fait parmi les paramètres que l'on juge comme essentiels dans la description du phénomène physique étudié.

L'équation (1) traduit aussi le fait suivant.

Si un phénomène physique G dépend de p paramètres indépendants mesurés par q unités fondamentales, ce phénomène physique exprimé par le nombre sans dimension :

$$\frac{G}{\prod_{i=1}^q x_i^{g_i}}$$

forme avec $p - q$ autres NSD (nombres sans dimension) une relation implicite entre $p - q + 1$ NSD notés π .

On a :

$$F(\pi, \pi_{q+1}, \pi_{q+2}, \dots, \pi_p) = 0 \quad (2)$$

1.1.2 Justification

L'étude présente est limitée aux problèmes de thermomécanique. Dans ce cas, $q = 4$ puisque les unités fondamentales sont : la longueur L , la masse M , le temps T et la température Θ . Sur le plan dimensionnel, la grandeur physique G est alors exprimée par :

$$[G] = L^\ell M^m T^t \Theta^\theta$$

et chaque paramètre x_i par :

$$[x_i] = L^{\ell_i} M^{m_i} T^{t_i} \Theta^{\theta_i}$$

Connaissant ces différentes relations, il est possible de construire un tableau réunissant les informations dimensionnelles relatives à $[G]$ et aux $[x_i]$ (tableau 1).

| Tableau 1 – Présentation des unités de la grandeur G et des paramètres x_i | | | | |
|--|-------|----------|-------|------------|
| Paramètres | M | L | T | Θ |
| G | m | ℓ | t | θ |
| x_1 | m_1 | ℓ_1 | t_1 | θ_1 |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| x_p | m_p | ℓ_p | t_p | θ_p |

L'hypothèse de base de la formulation semi-empirique des phénomènes et des corrélations qui s'ensuivent est que la grandeur G peut être représentée par une **série polynomiale** du type :

$$G = \sum k_n G_n \quad (3)$$

avec :

$$G_n = x_1^{e_{1n}} x_2^{e_{2n}} \dots x_p^{e_{pn}}$$

où k_n est une constante et n le numéro de monômes de la série. Le nombre de monômes sera, *a priori*, d'autant plus élevé que la précision recherchée et le domaine de validité de la fonction seront plus importants. Avec cette hypothèse, le principe d'homogénéité impose d'avoir :

$$[G] = [G_n]$$

Ainsi, pour chaque monôme d'ordre n , on a :

$$\left. \begin{aligned} \ell &= \ell_i e_{in} \\ m &= m_i e_{in} \\ t &= t_i e_{in} \\ \theta &= \theta_i e_{in} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Ce système d'équations est un système de q équations (ici $q = 4$) à p inconnues e_i (i variant de 1 à p). Il ne peut être résolu que pour quatre des exposants e_i relatifs à q paramètres x_i , en fonction des $(p - q)$ autres exposants des $(p - q)$ autres paramètres. Les q premiers paramètres peuvent être quelconques à condition qu'ils soient dimensionnellement indépendants (voir ci-après). Dans la suite, on leur réservera l'indice i (i allant de 1 à q) alors que l'indice j sera utilisé pour les $p - q$ autres paramètres (j allant de $q + 1$ à p). Le système conduisant au calcul des exposants e_{in} peut s'écrire :

$$\left. \begin{aligned} \ell_i e_{in} &= \ell - \ell_j e_{jn} \\ m_i e_{in} &= m - m_j e_{jn} \\ t_i e_{in} &= t - t_j e_{jn} \\ \theta_i e_{in} &= \theta - \theta_j e_{jn} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

avec $i = 1$ à 4,

$j = 5$ à p .

Ce système a une solution non triviale si le déterminant de la matrice des coefficients des e_{in} est différent de 0, c'est-à-dire si les x_i sont dimensionnellement indépendants :

$$\begin{vmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 & \ell_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (6)$$

Pour chaque monôme, les solutions sont de la forme :

$$e_{in} = f_{in}(\ell, m, t, \theta, e_{5n}, e_{6n}, \dots, e_{pn}) \quad (7)$$

Dans cette formule ℓ_j, m_j, \dots ne sont pas explicités car ils sont prédéterminés dès que les paramètres x_i et x_j sont choisis.

La relation (7) peut encore être écrite sous la forme suivante :

$$e_{in} = g_{in}(\ell, m, t, \theta) + h_{in}(e_{5n}, e_{6n}, \dots, e_{pn}) \quad (8)$$

puisque les fonctions f_{in} sont toujours des fonctions **linéaires** de $\ell, m, \dots, e_5, \dots, e_p$. Dans cette expression, les g_{in} sont en fait des nombres calculés à partir des valeurs connues ℓ, m, \dots et ℓ_j, m_j, \dots et les fonctions h_{in} sont elles-mêmes des fonctions linéaires des e_{jn} dépendant des coefficients ℓ_j, m_j, \dots et ℓ_i, m_i, \dots . On écrit pour le monôme n :

$$h_{in} = \sum k_{ijn} e_{jn}$$

Alors, l'équation (3) explicitant G_n peut s'écrire :

$$G_n = \prod_{i=1}^q x_i^{g_{in} + h_{in}} \prod_{j=q+1}^p x_j^{e_{jn}} \quad (9)$$

soit :

$$G_n = \prod_{i=1}^q x_i^{g_{in}} \left\{ \prod_{j=q+1}^p \left[\left(\prod_{i=1}^q x_i^{k_{ijn}} \right) x_j \right]^{e_{jn}} \right\} \quad (10)$$

Quels que soient les G_n , les g_{in} qui ne dépendent que des $\ell, m, \dots, \ell_j, m_j, \dots$ ont la même valeur dans la solution des e_{in} . Le même résultat s'obtient pour les k_{ijn} . On peut donc écrire :

$$\frac{G}{\prod_{i=1}^q x_i^{g_i}} = \sum k_n \left\{ \prod_{j=q+1}^p \left[\left(\prod_{i=1}^q x_i^{k_{ijn}} \right) x_j \right]^{e_{jn}} \right\} \quad (11)$$

Dans cette équation, G représente une grandeur physique dont la dimension ne change évidemment pas avec le problème traité. Analysons alors plusieurs cas dans lesquels la valeur de p diffère. Si $p = q = 4$, l'équation (11) devient simplement :

$$G = x_1^{g_1} \dots x_4^{g_4} \sum k_n \quad (12)$$

Le résultat indique que, $\sum k_n$ étant sans dimension, le produit $\prod_{i=1}^q x_i^{g_i}$ doit avoir la même dimension que G et que le rapport :

$$\frac{G}{\prod_{i=1}^q x_i^{g_i}}$$
 est un nombre sans dimension noté π .

Si $p = q + 1 = 5$, l'équation (11) s'écrit :

$$G = x_1^{g_1} \dots x_4^{g_4} \sum k_n \left\{ \left[\left(\prod_{i=1}^4 x_i^{k_{i5}} \right) x_5 \right]^{e_{5n}} \right\} \quad (13)$$

Compte tenu du résultat précédent, on peut affirmer que, dans cette relation, le terme entre crochets doit être **sans dimension**. On le notera π_5 .

En poursuivant le même raisonnement pour des valeurs de p supérieures, on montre que toutes les fonctions de la forme :

$$\left[\left(\prod_{i=1}^q x_i^{k_{ij}} \right) x_j \right]^{e_{jn}} = \pi_j^{e_{jn}} \quad (14)$$

sont des nombres sans dimension. La relation (11) s'écrit alors :

$$\frac{G}{\prod_{i=1}^q x_i^{g_i}} = \pi = \sum k_n \left[\prod_{j=q+1}^p \pi_j^{e_{jn}} \right] \quad (15)$$

ou encore de façon plus formelle :

$$\pi = \frac{G}{\prod_{i=1}^q x_i^{g_i}} = F(\pi_{q+1}, \pi_{q+2}, \dots, \pi_p)$$

ou sous forme implicite :

$$F(\pi, \pi_{q+1}, \pi_{q+2}, \dots, \pi_p) = 0$$

On retrouve l'énoncé du **théorème de Vaschy-Buckingham** :

Toute grandeur physique représentant un phénomène fonction de p variables indépendantes mesurées par q unités fondamentales peut être décrit par une fonction implicite de $p - q + 1$ nombres sans dimension.

Le **corollaire de ce théorème** est que la valeur du nombre sans dimension caractéristique du phénomène physique étudié est unique pour tous les cas où les nombres sans dimension attachés aux paramètres qui gouvernent ce phénomène ont une valeur déterminée. Cette remarque est à la base de la modélisation des phénomènes physiques par des corrélations semi-empiriques adimensionnées.

1.2 Exemple d'application

Considérons l'évolution d'un gaz à travers une machine (ventilateur, compresseur ou turbine par exemple) et recherchons l'expression de la pression de sortie P_s en fonction des paramètres ayant une influence sur cette grandeur (figure 1).

La résolution de ce problème par la méthode de l'analyse dimensionnelle nécessite tout d'abord de recenser les p paramètres dont dépend la grandeur P_s . Cette phase de la résolution fait appel à une connaissance phénoménologique du problème, donc à une certaine expérience de la part de l'ingénieur. Ainsi, dans le problème posé, l'analyse physique et l'expérience montrent que les paramètres suivants ont une influence sur la pression du gaz à la sortie :

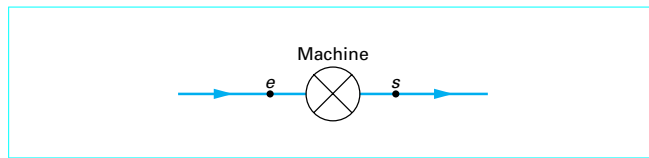


Figure 1 – Schéma d'une machine parcourue par un gaz

- la pression à l'entrée P_e ;
- la nature du fluide, que l'on peut caractériser par les paramètres : γ_g (rapport des capacités thermiques sous pression et sous volume constants), μ (viscosité dynamique) et ρ (masse volumique) ;
- la vitesse de rotation de la roue de la machine N (ou sa vitesse périphérique v_e) ;
- la taille de la machine caractérisée, par exemple, par le diamètre extérieur \varnothing de la roue ;
- le débit massique \dot{m} du fluide.

Ainsi, on a $p = 7$ paramètres indépendants qui peuvent avoir une influence sur le phénomène étudié : la pression de sortie du fluide. Les autres paramètres que l'on pourrait évoquer n'ont que peu ou pas d'influence ou sont eux-mêmes fonctions des paramètres désignés ci-dessus.

Le nombre d'unités fondamentales q intervenant dans ces paramètres est égal à 3. Ce sont la masse M , la longueur L et le temps T . Les x_i paramètres de base peuvent être choisis arbitrairement. On prendra par exemple : P_e , ρ et m . On peut alors établir le tableau des unités correspondant à ce problème (tableau 2).

| Tableau 2 – Présentation des dimensions de la grandeur à exprimer et des paramètres | | | | |
|---|---------|-------------|----------|---------------------------|
| Paramètres | M | L | T | Exposants e_i des x_i |
| P_s | $m = 1$ | $\ell = -1$ | $t = -2$ | |
| P_e | 1 | -1 | -2 | e_1 |
| ρ | 1 | -3 | 0 | e_2 |
| \dot{m} | 1 | 0 | -1 | e_3 |
| γ_g | 0 | 0 | 0 | e_4 |
| v_e | 0 | 1 | -1 | e_5 |
| \varnothing | 0 | 1 | 0 | e_6 |
| μ | 1 | -1 | -1 | e_7 |

Le respect des conditions dimensionnelles [système (4)] s'écrit :

$$\begin{aligned}
 m &= e_1 + e_2 + e_3 + e_7 \\
 \ell &= -e_1 - 3e_2 + e_5 + e_6 - e_7 \\
 t &= -2e_1 - e_3 - e_5 - e_7
 \end{aligned}$$

La résolution de ce système donne :

$$\begin{aligned}
 e_1 &= -\frac{1}{4}(3m + \ell + 3t + 2e_5 - e_6 + e_7) \\
 e_2 &= \frac{1}{4}(m - \ell + t + 2e_5 + e_6 - e_7) \\
 e_3 &= \frac{1}{2}(3m + \ell + t - e_6 - e_7)
 \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned}
 g_1 &= -\frac{1}{4}(3m + \ell + 3t) = -\frac{1}{4}(3 - 1 - 6) = 1 \\
 g_2 &= \frac{1}{4}(m - \ell + t) = \frac{1}{4}(1 + 1 - 2) = 0 \\
 g_3 &= \frac{1}{2}(3m + \ell + t) = \frac{1}{2}(3 - 1 - 2) = 0 \\
 h_1 &= -\frac{1}{2}e_5 + \frac{1}{4}e_6 - \frac{1}{4}e_7 \\
 h_2 &= \frac{1}{2}e_5 + \frac{1}{4}e_6 - \frac{1}{4}e_7 \\
 h_3 &= -\frac{1}{2}e_6 + \frac{1}{2}e_7
 \end{aligned}$$

La relation (9) liant l'un des termes du polynôme de la grandeur G aux paramètres s'écrit alors :

$$(P_s)_n = P_e^{1+} \frac{-2e_{5n} + e_{6n} - e_{7n}}{4} \rho^{\frac{2e_{5n} + e_{6n} - e_{7n}}{4}} m^{-\frac{e_{6n} + e_{7n}}{2}} \gamma_g^{e_{4n}} v_e^{e_{5n}} \varnothing^{e_{6n}} \mu^{e_{7n}}$$

ce qui, sous la forme (10), s'écrit :

$$(P_s)_n = P_e \left\{ \gamma_g^{e_{4n}} \left(\frac{v_e}{\sqrt{P_e/\rho}} \right)^{e_{5n}} \left(\frac{\varnothing \sqrt{P_e/\rho}}{\sqrt{\dot{m}}} \right)^{e_{6n}} \left(\frac{\mu}{\sqrt[4]{P_e/\rho} \sqrt{\dot{m}}} \right)^{e_{7n}} \right\}$$

Mise sous la forme (11) (forme la plus générale des corrélations sans dimension basées sur la forme polynomiale) cette équation devient :

$$\frac{P_s}{P_e} = \sum_1^n k_n \left\{ \gamma_g^{e_{4n}} \left(\frac{v_e}{\sqrt{P_e/\rho}} \right)^{e_{5n}} \left(\frac{\varnothing \sqrt{P_e/\rho}}{\sqrt{\dot{m}}} \right)^{e_{6n}} \left(\frac{\mu}{\sqrt[4]{P_e/\rho} \sqrt{\dot{m}}} \right)^{e_{7n}} \right\} \quad (16)$$

Dans cette relation, les différents paramètres des monômes sont des nombres sans dimension notés d'une manière générale : $\pi_4, \pi_5, \pi_6, \pi_7$.

Seule l'expérience peut conduire à la détermination des exposants e_j pour chaque valeur de n ainsi que des constantes k_n . Vu la complexité de la tâche (dans l'exemple étudié, $5n$ inconnues à déterminer), dans de très nombreux cas, on utilise une relation à un seul monôme pour décrire le phénomène.

La relation (16) est aussi notée de façon formelle [équation (1)] :

$$\frac{P_s}{P_e} = F \left[\gamma_g, \frac{v_e}{\sqrt{P_e/\rho}}, \frac{\varnothing (P_e/\rho)^{1/4}}{\sqrt{\dot{m}}}, \frac{\mu}{(P_e/\rho)^{1/4} \sqrt{\dot{m}}} \right] \quad (17)$$

Dans cette équation, les nombres sans dimension qui apparaissent à l'intérieur des crochets peuvent être remplacés par toute combinaison qui peut être faite entre eux. On obtient alors des nombres sans dimension d'usage courant. Ainsi :

— la division du deuxième NSD par la racine carrée du premier donne le **nombre de Mach** Ma (rapport de la vitesse périphérique v_e à la vitesse du son v_s ([B 8 165], § 1.4) à l'entrée de la machine) :

$$Ma = \frac{v_e}{\sqrt{\gamma_g P_e/\rho}}$$

— la division du troisième NSD par le quatrième multiplié par le deuxième correspond au **nombre de Reynolds** Re relatif au mouvement de la roue :

$$Re = \frac{\rho v_e \varnothing}{\mu}$$

— l'inverse du produit du deuxième NSD par le carré du troisième conduit au **coefficient de débit de Rateau** :

$$\delta_R = \frac{\dot{m}}{\rho \varnothing^2 v_e} = \frac{\dot{V}}{N \varnothing^3}$$

L'équation (17) devient alors :

$$\frac{P_s}{P_e} = F(\gamma_g, Ma, Re, \delta_R) \quad (18)$$

2. Similitude. Maquettes et prototypes

Dans ce paragraphe, on cherche à établir les conditions à respecter pour que les résultats des mesures expérimentales et les conclusions et corrélations établies à partir de l'étude d'un processus physique à l'aide d'une maquette puissent être utilisés pour décrire le processus physique dans le cas du problème étudié, qui est appelé aussi : cas du prototype.

2.1 Mise en évidence des écoulements semblables

Dans le cas de l'écoulement d'un **fluide pesant incompressible**, l'équation de Navier-Stokes (BE 8 153), éq. (51)) s'écrit :

$$Dv_i / dt = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v_i \quad (19)$$

avec P^* la pression piézométrique (pression additionnée de l'énergie potentielle gravifique $\rho g z$, où g est l'accélération de la pesanteur et z l'altitude),

v_i la composante selon x_i de la vitesse,

t le temps.

Un tel écoulement, dans lequel n'apparaît plus explicitement la pesanteur, est appelé **écoulement en charge**.

Pour définir l'écoulement, on utilise des **variables réduites** (sans dimension). Pour les paramètres de longueur, on pose :

$$x'_i = \frac{x_i}{D}$$

où D est une **dimension caractéristique** de l'écoulement **choisie arbitrairement** (largeur d'un obstacle, diamètre d'une canalisation... figure 2). Pour les composantes de la vitesse, on note :

$$v'_i = \frac{v_i}{V}$$

où V est une **vitesse caractéristique** (ou de référence) en un point (à un instant déterminé éventuellement). Ces deux paramètres caractéristiques étant définis, le **temps caractéristique**, qui en dépend, est donné par : $T = D/V$. Pour la pression étoilée, on pose :

$$P^{**} = \frac{P^*}{P_{\text{réf}}^*}$$

$P_{\text{réf}}^*$ étant la **pression caractéristique**.

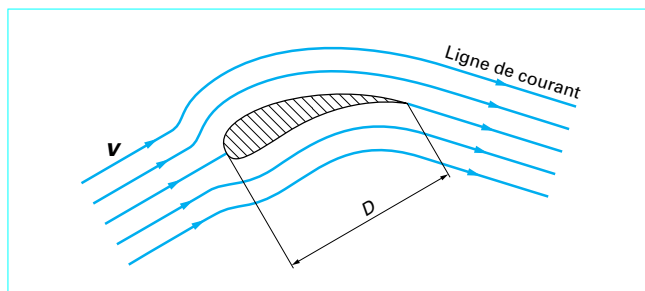


Figure 2 – Écoulement autour d'un obstacle

Les diverses différentielles et dérivées, qui apparaissent dans l'équation (19), deviennent :

$$dx_i = D dx'_i$$

$$dv_i = V dv'_i$$

$$dt = \frac{D}{V} dt'$$

$$dP^* = P_{\text{réf}}^* dP^{**}$$

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i^2} = \frac{V}{D^2} \frac{\partial^2 v'_i}{\partial x_i'^2}$$

Alors, l'équation de Navier-Stokes (19) s'écrit :

$$\frac{V^2}{D} \frac{Dv'_i}{dt'} = -\frac{1}{\rho} \frac{P_{\text{réf}}^*}{D} \frac{\partial P^{**}}{\partial x'_i} + \frac{\mu}{\rho} \frac{V}{D^2} \nabla'^2 v'_i$$

ou encore :

$$\frac{Dv'_i}{dt'} = -Eu \frac{\partial P^{**}}{\partial x'_i} + \frac{1}{Re} \nabla'^2 v'_i \quad (20)$$

avec $Re = \frac{\rho V D}{\mu}$ le **nombre de Reynolds** de l'écoulement,

$$Eu = \frac{P_{\text{réf}}^*}{\rho V^2} \text{ le nombre d'Euler.}$$

L'équation (20) est l'**équation réduite de Navier-Stokes** pour un écoulement de fluide pesant incompressible. Ainsi, deux écoulements à même nombre de Reynolds et même nombre d'Euler et qui ont la même pression réduite pour des coordonnées réduites et un temps réduit identiques ont les mêmes champs de vitesses réduites : ils sont **semblables**. L'identité des nombres d'Euler et de Reynolds correspond à des **conditions de similitude des écoulements**.

2.1.1 Conditions de similitude entre deux écoulements

Soient deux écoulements, l'un correspondant au **prototype** p , l'autre à la **maquette** m (figure 3). La maquette est géométriquement semblable au prototype si les coordonnées de **deux points homologues** ont les mêmes valeurs réduites :

$$x'_i = \frac{x_{im}}{D_m} = \frac{x_{ip}}{D_p}$$

$$x_{im} = \frac{D_m}{D_p} x_{ip}$$

$$x_{im} = k_d x_{ip} \quad (21)$$

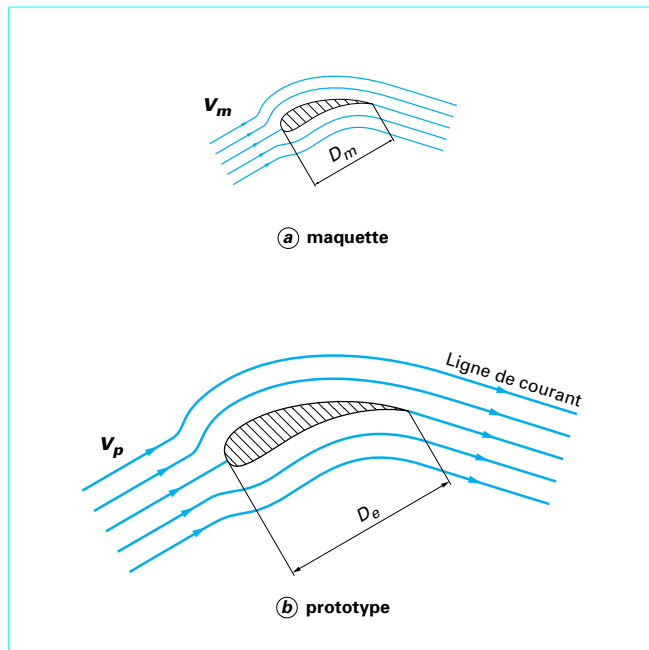


Figure 3 – Écoulements autour d'un obstacle. Comparaison maquette/prototype

k_d est appelé **échelle des distances** ou échelle **géométrique**. Si k_d est une constante, tous les points d'un système ont leurs homologues dans l'autre système. La **similitude géométrique** est respectée. Notons que cette similitude conserve les angles dans le passage de la maquette au prototype.

De même, les écoulements sont semblables, si en deux points homologues les vitesses réduites sont identiques :

$$\begin{aligned}
 v_i &= \frac{v_{im}}{V_m} = \frac{v_{ip}}{V_p} \\
 v_{im} &= \frac{V_m}{V_p} v_{ip} \\
 v_{im} &= k_v V_{ip} \quad (22)
 \end{aligned}$$

k_v est l'**échelle des vitesses** ou échelle **cinématique**. Si k_v est constante, la **similitude cinématique** est respectée.

Les temps réduits doivent également être identiques, ce qui impose :

$$\begin{aligned}
 t'_i &= \frac{t_m}{D_m/V_m} = \frac{t_p}{D_p/V_p} \\
 t_m &= \frac{D_m}{D_p} \frac{V_p}{V_m} t_p \\
 t_m &= k_t t_p
 \end{aligned}$$

$k_t = \frac{k_d}{k_v}$ est l'**échelle des temps** ou échelle **temporelle** qui doit être constante pour que la **similitude temporelle** soit respectée.

La relation entre l'échelle des temps et les échelles géométrique et cinématique est dite **condition cinématique de similitude**.

Enfin, les pressions doivent également respecter la relation :

$$\begin{aligned}
 P^{*'} &= \frac{P_p^*}{P_{\text{réf } p}^*} = \frac{P_m^*}{P_{\text{réf } m}^*} \\
 P_m^* &= \frac{E u_m}{E u_p} \frac{\rho_m}{\rho_p} \left(\frac{V_m}{V_p} \right)^2 P_p^*
 \end{aligned}$$

soit, du fait de l'identité des nombres d'Euler :

$$P_m^* = k_p k_v^2 P_p^* = k_p P_p^*$$

$k_p = k_p k_v^2$ est l'**échelle des pressions** ou échelle **dynamique**. La relation entre les échelles des pressions, des masses volumiques et des vitesses est la **condition dynamique de similitude**.

Ainsi, deux écoulements qui respectent toutes ces conditions sur x_i, v_i, t et P^* sont semblables bien que différents. On peut transposer les résultats de l'un à l'autre.

2.1.2 Conditions aux limites et conditions initiales

Il ne faut pas oublier que la solution physique d'un problème est conditionnée à la **définition complète du système**, c'est-à-dire après avoir fixé les **conditions initiales** et les **conditions aux limites**. Alors, la similitude de deux écoulements requiert en plus des conditions précédentes sur les diverses variables ou paramètres, l'identité des conditions aux limites et initiales, exprimées en **variables réduites**, aussi bien quant aux grandeurs géométriques, que cinématiques, que de pression ou de temps. Autrement dit, les conditions aux limites et initiales doivent respecter toutes les conditions de similitude.

2.2 Conditions de similitude. Cas général

L'étude de cas qui précède a permis de mettre en évidence que la similitude entre des écoulements nécessite de respecter certaines conditions parmi lesquelles on note la **constance de la valeur des échelles** dans tout l'écoulement. Cette condition peut être généralisée à toutes les études de similitude. Ainsi, on peut énoncer ce qui suit.

La similitude entre une maquette et son prototype est respectée si les grandeurs G aux points homologues (c'est-à-dire en des points de mêmes coordonnées réduites) des deux systèmes respectent la relation :

$$G_m(M_m, t_m) = k_g G_p(M_p, t_p) \quad (23)$$

dans laquelle k_g , échelle de la grandeur G , doit être constante, donc unique.

C'est la **condition générale de similitude** qu'il n'est que rarement possible de respecter intégralement. En effet, il est souvent difficile de garder la constance de k_g pour toutes les grandeurs de même dimension. Ainsi, la similitude ne sera souvent que partielle et les résultats obtenus, en transposant au prototype ceux de la maquette, ne seront qu'approchés.

Par ailleurs, la similitude nécessite aussi de respecter certaines relations entre différentes échelles de grandeurs. Ce sont les **conditions particulières de similitude** que nous allons rechercher ci-après.

2.2.1 Similitude géométrique

La similitude géométrique nécessite le respect de l'**échelle des distances** k_d en tout point et dans toutes les directions y compris pour les limites du problème.

Cependant, dans certains problèmes, il n'est pas possible de respecter la condition :

$$k_d = \text{constante}$$

dans toutes les directions. Il y a alors « **distorsion** » géométrique.

Exemple : dans la maquette d'un port, la profondeur d'eau ne respecte pas l'échelle horizontale :

$$k_d \text{ horizontale} \neq k_d \text{ verticale}$$

Le coefficient de distorsion δ vaut, par définition :

$$\delta = \frac{k_d \text{ horizontale}}{k_d \text{ verticale}}$$

Il ne faut cependant pas que δ soit trop grand. En pratique, dans l'exemple précédent, on admet $\delta \approx 2$ à 3 au maximum.

2.2.2 Similitude cinématique

La cinématique met en jeu les masses, les distances, le temps et la vitesse. Pour un écoulement, l'équation cinématique fondamentale est l'équation de la conservation de la masse ([BE 8 153], § 2.1) qui s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} = 0$$

ou encore :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0$$

En notant que, entre la maquette et le prototype, on doit avoir :

$$\rho_m = k_p \rho_p ; v_{im} = k_v v_{ip} ; x_{im} = k_d x_{ip} ; t_m = k_t t_p$$

la conservation de la masse pour la maquette s'écrit, en utilisant les paramètres du prototype :

$$\frac{k_p}{k_t} \frac{\partial \rho_p}{\partial t_p} + \frac{k_p k_v}{k_d} \frac{\partial \rho_p v_{ip}}{\partial x_{ip}} = 0$$

Pour le prototype on a :

$$\frac{\partial \rho_p}{\partial t_p} + \frac{\partial \rho_p v_{ip}}{\partial x_{ip}} = 0$$

Ainsi, il faut que :

$$\frac{k_p}{k_t} = \frac{k_p k_v}{k_d}$$

soit :

$$\frac{k_v k_t}{k_d} = 1 \quad (24)$$

C'est la **condition cinématique de similitude** qui lie les échelles des temps, des distances et des vitesses. On retrouve le résultat mentionné au paragraphe 2.1.

L'échelle des accélérations $\gamma = \frac{Dv}{dt}$ est également liée à ces échelles par :

$$k_\gamma = \frac{k_v}{k_t} = \frac{k_d}{k_t^2} = \frac{k_v^2}{k_d} \quad (25)$$

2.2.3 Similitude dynamique

La dynamique relie le mouvement à ses causes. La relation fondamentale est celle de Newton :

$$\mathbf{F} = m \vec{\gamma}$$

Que ce soit pour la maquette ou pour le prototype, cette relation doit être respectée. Ainsi, en transcrivant comme précédemment l'équation relative à la maquette à l'aide des grandeurs relatives au prototype, compte tenu de l'échelle des forces k_F , de celles des masses k_m et des accélérations k_γ , on a :

$$k_F \mathbf{F}_p = k_m m_p k_\gamma \vec{\gamma}_p ; \mathbf{F}_p = m_p \vec{\gamma}_p$$

soit :

$$k_F = k_m k_\gamma$$

Comme $k_m = k_p k_d^3$, on peut également écrire :

$$k_F = k_p k_d^2 k_\gamma^2 = k_p k_d^4 \frac{1}{k_t^2} \quad (26)$$

La similitude dynamique impose ainsi, outre la **constance** de k_p (qui peut être considérée comme l'échelle dynamique de base) dans tout l'écoulement, le respect de ces diverses relations entre les échelles. C'est la **condition dynamique de similitude**, qui peut avoir diverses variantes d'écriture dont certaines sont développées ci-dessous.

L'échelle des forces doit être la **même pour toutes les forces de types différents**. Ainsi, en mécanique des fluides, si on reprend l'équation de Cauchy ([BE 8 153], § 3.2) appliquée à un **fluide pesant** (compressible ou incompressible en mouvement stationnaire ou instationnaire), on a pour le prototype :

$$\rho_p \frac{\partial v_{ip}}{\partial t_p} + \rho_p v_{jp} \frac{\partial v_{ip}}{\partial x_{jp}} = - \frac{\partial P_p}{\partial x_{ip}} + \rho_p g_{ip} + \frac{\partial T'_{ijp}}{\partial x_{jp}} \quad (27)$$

où P est la pression du fluide, g_i la composante selon la direction x_i de l'accélération de la pesanteur, T'_{ij} la composante de la contrainte visqueuse :

$$T'_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \eta \text{div } \mathbf{v} \delta_{ij}$$

avec η le deuxième coefficient de viscosité,
 δ_{ij} le symbole de Kronecker.

Dans l'équation (27), homogène à une force par unité de volume :

- le membre de gauche représente les forces d'inertie ;
- le premier terme du membre de droite représente une force due à la pression ;
- le deuxième terme correspond à une force de gravité (due à la pesanteur) ;
- enfin le dernier terme est dû aux forces de viscosité.

En remplaçant les paramètres de la maquette par ceux du prototype, compte tenu des échelles, l'équation de Cauchy pour la maquette devient :

$$k_p \frac{k_v}{k_t} \rho_p \frac{\partial v_{ip}}{\partial t_p} + k_p \frac{k_v^2}{k_d} \rho_p v_{jp} \frac{\partial v_{ip}}{\partial x_{jp}} = - \frac{k_p}{k_d} \frac{\partial P_p}{\partial x_{ip}} + k_p k_g \rho_p g_{ip} + \frac{k_\mu k_v}{k_d^2} \frac{\partial T'_{ijp}}{\partial x_{jp}} \quad (28)$$

Le respect de ces deux équations ne peut être effectif, quels que soient les écoulements, que si tous les coefficients de l'équation (28) sont égaux entre eux, ce qui revient à exprimer l'**identité de l'échelle de toutes les forces** qui sont ici des forces volumiques et pour lesquelles on a (à partir de l'équation (26)) :

$$k_{F_v} = \frac{k_p k_d^2}{k_d} = \frac{k_p k_d}{k_t^2} = \frac{k_p k_v}{k_t} \quad (29)$$

Écrivons l'identité des échelles des forces impliquées dans l'équation de Cauchy.

2.2.3.1 Identité des échelles des forces d'inertie

$$k_p \frac{k_v}{k_t} = k_p \frac{k_v^2}{k_d} \Rightarrow \frac{k_v k_t}{k_d} = 1$$

On retrouve la condition de similitude cinématique.

2.2.3.2 Identité des échelles des forces de pression et des forces d'inertie

$$k_p \frac{k_v^2}{k_d} = \frac{k_p}{k_d} \Rightarrow \frac{k_p}{k_p k_v^2} = 1 \tag{30}$$

Si on considère la maquette et le prototype, cette relation peut encore s'écrire :

$$Eu_m = \frac{P_m}{\rho_m v_m^2} = \frac{P_p}{\rho_p v_p^2} = Eu_p \tag{31}$$

avec Eu le **nombre d'Euler**.

Ainsi, l'identité des échelles des forces implique l'égalité des **nombre d'Euler** de chaque écoulement (résultat énoncé dans l'étude de cas du paragraphe 2.1). Le nombre d'Euler est une mesure du rapport entre les **forces de pression** et les **forces d'inertie** d'un écoulement.

Dans le cas de l'**écoulement d'un gaz parfait**, la vitesse du son v_s est telle que ([B 8165], § 1.4) :

$$v_s^2 = \gamma_g r T = \gamma_g \frac{P}{\rho}$$

avec $\gamma_g = \frac{c_p}{c_v}$ rapport des capacités thermiques massiques du gaz,
 r constante du gaz,
 T température du gaz.

Dans ce cas, le nombre d'Euler est :

$$Eu = \frac{P}{\rho v^2} = \frac{v_s^2 \rho}{\gamma_g \rho v^2} = \frac{1}{Ma^2 \gamma_g}$$

avec $Ma = v/v_s$ le **nombre de Mach**.

Si les écoulements de la maquette et du prototype ont lieu avec des fluides ayant même γ_g , la condition d'Euler peut être remplacée par la condition d'égalité des nombres de Mach :

$$Ma_m = Ma_p$$

2.2.3.3 Identité des échelles des forces de gravité et des forces d'inertie

Le raisonnement établi ci-dessus demeure :

$$k_p \frac{k_v^2}{k_d} = k_p k_g \Rightarrow \frac{k_v^2}{k_d k_g} = 1 \tag{32}$$

Entre la maquette et le prototype, il faut que :

$$Fr_m = \frac{v_m}{\sqrt{g_m D_m}} = \frac{v_p}{\sqrt{g_p D_p}} = Fr_p \tag{33}$$

C'est l'égalité des **nombre de Froude** Fr qui mesure le rapport entre les **forces d'inertie** et les **forces de gravité** d'un écoulement.

2.2.3.4 Identité des échelles des forces de viscosité et des forces d'inertie

La relation entre ces échelles s'écrit :

$$k_p \frac{k_v}{k_d} = \frac{k_v k_\mu}{k_d^2} \Rightarrow \frac{k_p k_v k_d}{k_\mu} = 1 \tag{34}$$

Cette condition implique qu'entre la maquette et le prototype, il faut que :

$$Re_m = \frac{\rho_m v_m D_m}{\mu_m} = \frac{\rho_p v_p D_p}{\mu_p} = Re_p \tag{35}$$

C'est l'égalité des **nombre de Reynolds** Re (cf. § 2.1) qui mesure le rapport entre les **forces d'inertie** et les **forces de viscosité**.

2.2.4 Similitude énergétique

L'échelle des forces k_F doit obéir à la relation (26) ou à l'équation (29) pour les forces par unité de volume k_{Fv} . Comme l'énergie E correspond au produit d'une force F par une distance D , l'échelle des énergies ($E = F \cdot D$) doit être :

— pour l'énergie :

$$k_E = k_p k_v^2 k_d^3$$

— pour l'énergie volumique :

$$k_{E_v} = k_p k_v^2$$

— pour l'énergie massique :

$$k_{E_m} = k_v^2 \tag{36}$$

De même, la puissance \dot{E} correspondant au produit d'une force par une vitesse, on a :

$$k_{\dot{E}} = k_p k_v^3 k_d^3 \tag{37}$$

Outre ces conditions, la similitude énergétique est respectée lorsque toutes les formes d'énergie sont à la même échelle entre la maquette et le prototype. Les conditions sont alors dictées par l'équation de l'énergie ([BE 8153], § 5.4, équation (102)) dans laquelle, pour simplifier le raisonnement, on néglige la source d'énergie interne $Q_{vs} = 0$:

$$\int_V \rho c_p \frac{DT}{dt} dV = \int_V \left(T \beta \frac{DP}{dt} + \Phi \right) dV + \int_{\Omega} \lambda (\mathbf{grad} T) \mathbf{n} d\Omega + \int_{\Omega'} h_c \Delta T d\Omega' \tag{38}$$

- avec T la température,
- β le coefficient de dilatation volumique,
- Φ la fonction dissipation ([BE 8153], § 4.1),
- λ la conductivité thermique du fluide,
- Ω la section traversée par le flux conductif,
- Ω' la section de paroi matérielle où se produit le transfert par convection,
- V le volume d'intégration.

Dans cette équation :

- le membre de gauche correspond à la puissance interne véhiculée par le fluide et son inertie thermique ;
- le premier terme du membre de droite est la puissance due aux forces de pression ;
- le deuxième, la puissance dissipée par les frottements visqueux ;
- le troisième, la puissance thermique transmise par conduction dans le fluide ;
- le dernier, la puissance thermique transmise par convection entre le fluide et une paroi matérielle. Ce dernier terme n'est différencié du terme précédent que pour des raisons **artificielles** pratiques. En effet, dans de nombreux problèmes, les échanges thermiques entre un fluide et une paroi matérielle sont caractérisés par un coefficient d'échange convectif h_c .

Les **conditions de similitude énergétique**, qui traduisent l'identité des échelles de puissance ou d'énergie, s'écrivent comme suit. Notons que **dans la suite**, le terme **énergie sera utilisé à la place de puissance**.

2.2.4.1 Identité des échelles d'énergie interne et d'énergie de pression

La comparaison entre les échelles du terme du membre de gauche (énergie interne ou enthalpie du fluide) et le premier terme du membre de droite (énergie potentielle de pression) conduit aux relations suivantes entre échelles :

$$k_p k_{c_p} k_T / k_t = k_T k_\beta k_p / k_t \Rightarrow \frac{k_p k_{c_p}}{k_\beta k_p} = 1 \quad (39)$$

Comme la dimension du coefficient de dilatation β :

$$\beta = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (40)$$

est égale à l'inverse d'une température, $k_\beta = k_T^{-1}$, les équations (39) et (30) permettent d'écrire :

$$\frac{k_{c_p} k_p}{k_p} k_T = 1 \Rightarrow \frac{k_{c_p}}{k_p} k_T = 1 \quad (41)$$

Cette relation traduit la nécessité de la **constance d'une nouvelle échelle** k_T ou k_{c_p} (le choix de l'une ou de l'autre de ces échelles dépend du problème à traiter) et l'égalité des **nombre d'Eckert** $Ec = c_p T / v^2$ entre la maquette et le prototype :

$$Ec_m = \frac{c_{p m} T_m}{v_m^2} = \frac{c_{p p} T_p}{v_p^2} = Ec_p \quad (42)$$

Le nombre d'Eckert Ec donne une mesure du rapport entre l'**énergie interne** du fluide et son **énergie cinétique**.

Si le fluide est un gaz parfait, il obéit à l'équation d'état $P/\rho = (\bar{R}/\bar{M})T$ (où \bar{R} est la constante universelle des gaz parfaits et \bar{M} la masse molaire du gaz). Ainsi, on a :

$$k_p k_p^{-1} = k_T k_{\bar{M}}^{-1}$$

La première des équations (41) peut alors s'écrire :

$$k_{\bar{M}} k_{c_p} = 1 \quad (43)$$

La similitude entre la maquette et le prototype implique d'avoir :

$$\frac{c_{p m}}{c_{p p}} = \frac{\bar{M}_p}{\bar{M}_m} \quad (44)$$

Cette correspondance entre le fluide de la maquette et celui du prototype est souvent difficile à respecter (sauf s'il s'agit du même fluide).

2.2.4.2 Identité des échelles d'énergie interne et d'énergie dissipée par frottement

La fonction de dissipation Φ de l'énergie mécanique en chaleur a été définie dans [BE 8 153]. L'équation correspondante (équation (77)) permet d'écrire :

$$k_\Phi = k_\mu \frac{k_v^2}{k_d^2}$$

soit :

$$k_p k_{c_p} k_T / k_t = k_\mu \frac{k_v^2}{k_d^2} \quad \text{ou} \quad \frac{k_p k_{c_p} k_T k_d}{k_\mu k_v} = 1 \quad (45)$$

Pour la maquette et le prototype, il faut donc respecter la **relation de similitude** suivante :

$$Ec_m Re_m = \frac{c_{p m} T_m}{v_m^2} \frac{\rho_m v_m D_m}{\mu_m} = \frac{c_{p p} T_p}{v_p^2} \frac{\rho_p v_p D_p}{\mu_p} = Ec_p Re_p \quad (46)$$

Le produit du nombre d'Eckert Ec par le nombre de Reynolds Re correspond au rapport de l'**énergie interne** à l'**énergie dissipée par frottement**, alors que le nombre d'Eckert correspond au rapport de l'énergie interne à l'énergie cinétique et le nombre de Reynolds à l'énergie cinétique rapportée à l'énergie dissipée par frottement.

2.2.4.3 Identité des échelles d'énergie interne et d'énergie transmise par conduction

Le transfert d'énergie thermique par conduction est de la forme $\lambda \partial T / \partial x_i$. L'échelle de l'énergie correspondante rapportée à l'unité de volume est donc égale à $k_\lambda k_T / k_d^2$. Ainsi, on doit avoir :

$$k_p k_{c_p} k_T = k_\lambda \frac{k_T}{k_d^2}$$

soit :

$$\frac{k_p k_{c_p} k_d^2}{k_\lambda k_t} = \frac{k_p k_{c_p} k_v k_d}{k_\lambda} = 1 \quad (47)$$

Entre la maquette et le prototype, il convient alors de respecter l'égalité des termes :

$$\frac{\rho c_p v D}{\lambda} = Pe_p = Pe_m \quad (48)$$

ou encore :

$$\frac{\mu_p c_{p p}}{\lambda_p} \frac{\rho_p v_p D_p}{\mu_p} = Pr_p Re_p = Pr_m Re_m \quad (49)$$

Dans ces relations, Pe est le **nombre de Péclet** qui représente le rapport de l'**énergie interne** à l'**énergie transmise par conduction** et Pr est le **nombre de Prandtl** :

$$Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda} \quad (50)$$

et :

$$Pe = Pr Re \quad (51)$$

Si la « **similitude de Reynolds** » est déjà vérifiée (condition dynamique), il suffit de vérifier la « **similitude de Prandtl** » pour vérifier la « **similitude de Péclet** ».

Notons que, compte tenu de la définition de la diffusivité thermique $a = \lambda / \rho c_p$, le nombre de Prandtl correspond au rapport entre deux diffusivités du fluide : la diffusivité de la quantité de mouvement ν et la diffusivité thermique a :

$$Pr = \frac{\nu}{a} \quad (52)$$

2.2.4.4 Identité des échelles d'énergie transmise par conduction et d'énergie transmise par convection

En comparant les deux derniers termes de l'équation (38), on constate que la similitude entre la maquette et le prototype impose de respecter :

$$k_\lambda \frac{k_T}{k_d} = k_T k_{h_c}$$

$$\text{soit :} \quad \frac{k_{h_c} k_d}{k_\lambda} = 1 \quad (53)$$

Cette relation peut être transformée facilement en une relation entre nombres sans dimension dont l'identité est à respecter entre la maquette et le prototype :

$$Nu_m = \frac{h_{c m} D_m}{\lambda_m} = \frac{h_{c p} D_p}{\lambda_p} = Nu_p \quad (54)$$

C'est une nouvelle condition de similitude qui représente l'**identité des nombres de Nusselt** qui mesure le rapport entre la **chaleur convectée** à la paroi et la **chaleur conduite ou diffusée** dans la maquette et dans le prototype.

2.2.4.5 Identité des échelles d'énergie transmise par convection aux parois et d'énergie transportée (énergie interne)

Dans l'équation (38), le membre de gauche se décompose en un terme inertiel et un terme de transport :

$$\int_V \rho c_p \frac{DT}{dt} dV = \int_V \rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) dV \quad (55)$$

L'identité des échelles de l'énergie transportée et de l'énergie thermique transmise par convection aux parois (dernier terme de l'équation (38)) implique :

$$\frac{k_p k_{c_p} k_v k_T k_d^3}{k_d} = k_{h_c} k_T k_d^2 \quad \text{soit} \quad \frac{k_{h_c}}{k_p k_{c_p} k_v} = 1 \quad (56)$$

Cette identité d'échelle est équivalente à la condition d'égalité des **nombre de Stanton** St entre la maquette et le prototype :

$$St_m = \frac{h_{cm}}{\rho_m c_{pm} v_m} = \frac{h_{cp}}{\rho_p c_{pp} v_p} = St_p \quad (57)$$

L'égalité des nombres de Stanton ne correspond pas à une condition de similitude complémentaire au niveau de l'énergie. Ce n'est en réalité qu'une variante d'une autre condition de similitude, la similitude de Nusselt par exemple. En effet, on a :

$$St = \frac{Nu}{Pe}$$

Le nombre de Stanton est parfois appelé : **nombre de Margoulis** Ms .

2.3 Conditions particulières de similitude

Les conditions de similitude énoncées précédemment sont celles qui sont le plus fréquemment rencontrées dans les études d'écoulements classiques de convection forcée. Dans la pratique, de nombreux autres cas peuvent se présenter. Parmi ceux-ci, deux cas sont donnés ci-après à titre d'exemple.

2.3.1 Influence de la tension superficielle

Dans l'équation du bilan de la quantité de mouvement, les forces prises en compte sont les forces d'inertie, de pression, de gravité et de viscosité. Dans un problème où les forces de tension superficielle (souvent négligeables) ont de l'importance, il faut ajouter un terme approprié de force linéique. C'est le cas, par exemple, des problèmes d'équilibre diphasique liquide/vapeur avec une interface courbe (goutte ou bulle). La similitude entre le comportement de la maquette et celui du prototype impose alors de respecter l'identité entre l'échelle de cette force, due à la tension superficielle, et celle des autres forces. La comparaison entre les forces d'inertie et les forces de tension superficielle, par exemple, conduit à définir le **nombre de Weber** :

$$We = \frac{\rho v^2 D}{\sigma} \quad (58)$$

où σ est la tension superficielle, qui est une force par unité de longueur. Dans ce type de problème, le nombre de Weber doit avoir la même valeur pour le prototype et pour la maquette.

2.3.2 Convection naturelle

Dans les problèmes de convection naturelle, la force de gravité a une importance prépondérante, le « moteur » du mouvement étant lié à la variation de la masse volumique du fluide ρ avec la tempéra-

ture. Dans beaucoup de problèmes, on ne prend en compte cette variation avec la température que dans le terme de la force de gravité de l'équation du bilan de la quantité de mouvement. C'est l'hypothèse de Boussinesq. Avec cette hypothèse, l'équation (27) devient :

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] g_i + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \quad (59)$$

Cette équation est valable pour la maquette comme pour le prototype. Le développement de l'une en fonction de l'autre, compte tenu des échelles et de la condition d'identité des échelles des forces, notamment de gravité, de viscosité et d'inertie, conduit à écrire :

$$k_p k_g k_{\beta \Delta T} = \frac{k_\mu k_v}{k_d^2} = \frac{k_p k_v^2}{k_d} \quad (60)$$

De la deuxième partie de cette équation, on tire : $k_v = k_v/k_d$ qui est la condition de similitude de Reynolds. Cette relation permet d'éliminer l'échelle des vitesses dans la relation (60) et d'obtenir le **condition complémentaire de similitude de la convection naturelle** :

$$\frac{k_g k_{\beta \Delta T} k_d^3}{k_v^2} = 1 \quad (61)$$

Cette condition s'écrit encore, avec la définition des diverses échelles :

$$Gr_m = \frac{\ell_m^3 g_m \beta_m \Delta T_m}{v_m^2} = \frac{\ell_p^3 g_p \beta_p \Delta T_p}{v_p^2} = Gr_p \quad (62)$$

Les **nombres de Grashof** Gr doivent être identiques pour la maquette et le prototype. Le nombre de Grashof est une mesure du rapport des forces de poussée d'Archimède (deuxième terme de l'ensemble du terme de gravitation) aux forces visqueuses.

Dans les études de transfert thermique en convection naturelle, il faut aussi respecter les conditions de la similitude énergétique imposées par l'équation de l'énergie. Parmi ces conditions, on note l'identité des nombres de Prandtl (§ 2.2.4.3). Ainsi, on remplace parfois le nombre de Grashof par le **nombre de Rayleigh** Ra qui est le produit du nombre de Grashof par le nombre de Prandtl :

$$Ra = Gr Pr = \frac{\ell^3 g \beta \Delta T}{\nu a} = \frac{\ell^3 \rho^2 c_p g \beta \Delta T}{\mu \lambda} \quad (63)$$

3. Conclusion

En pratique, de nombreux phénomènes physiques sont modélisés à l'aide d'équations semi-empiriques écrites en utilisant des paramètres adimensionnés. L'écriture formelle de ces équations est guidée par l'application du théorème de Vaschy-Buckingham. La détermination des coefficients et exposants, plus ou moins nombreux, qui interviennent dans ces équations nécessite d'avoir recours à l'expérience. Cependant, l'application de l'équation déterminée par ce processus ne doit être faite que pour des situations ou des configurations pratiques **semblables** à celles qui existaient dans l'expérience ayant servi à déterminer les coefficients et exposants de l'équation. Cette expérience joue le rôle de maquette, les applications souhaitées constituent alors autant de prototypes.

Cette dernière notion est capitale dans l'application des très nombreuses corrélations trouvées dans la littérature scientifique. En particulier, il importe de bien connaître les conditions de réalisation de l'expérience ayant servi à établir la corrélation pour vérifier que toutes les conditions de similitude sont remplies entre cette expérience sur maquette et le prototype.

Pour résumer cet article, on trouvera dans le tableau 3 les conditions de similitude pour les problèmes thermomécaniques ainsi que les nombres sans dimension qui y sont associés.

Tableau 3 – Conditions de similitude et nombres sans dimension associés

| Similitude | Échelles de base | Grandeurs | | Échelles secondaires | Nombres sans dimension | |
|--|--|--|--|---|---|--|
| | | Base | Secondaires | | Principaux | Secondaires |
| 1. Cinématique | $k_d(L)$ $k_t(T)$ | Vitesse v | | $k_v = k_d/k_t$ | | |
| | | | Accélération γ | $k_\gamma = \frac{k_v}{k_t} = \frac{k_d}{k_t^2} = \frac{k_v^2}{k_d}$ | | |
| 2. Dynamique (force par unité de volume) | $k_\rho(M)$ | Forces (par unité de volume) | | $k_{F_v} = k_\rho k_d/k_t^2$ | | |
| | | Inertie volumique $\frac{M\gamma}{L^3} \rightarrow k_\rho k_\gamma$ | | $k_{I_v} = k_\rho \frac{k_v^2}{k_d}$ | | |
| | | Pression (en force/ unité de volume) $\frac{P}{L} \rightarrow \frac{k_p}{k_d}$ | | $k_p = k_\rho k_v^2$ | Euler $\rightarrow Eu = \frac{P}{\rho v^2}$ (forces de pression/ forces d'inertie) | Pour un gaz parfait Mach $\rightarrow Ma = \frac{1}{\sqrt{Eu \gamma_g}}$ |
| | | Gravité $\rho g \rightarrow k_g k_\rho$ | | $k_g = k_v^2/k_d$ | Froude $\rightarrow Fr = \frac{v}{\sqrt{gD}}$ (forces d'inertie/forces de gravité) | |
| | | Viscosité $\mu \frac{v}{L^2} \rightarrow k_\mu \frac{k_v}{k_d^2}$ | | $k_\mu = k_\rho k_v k_d$ $k_v = k_v k_d$ | Reynolds $\rightarrow Re = \frac{\rho v D}{\mu}$ (forces d'inertie/forces de viscosité) | |
| | | Convection naturelle $\rho \beta \Delta T g_i \rightarrow k_\rho k_{\beta \Delta T} k_g$ | $k_\rho k_g k_{\beta \Delta T} = \frac{k_\mu k_v}{k_d^2} = \frac{k_\rho k_v^2}{k_d}$ | Grashof $\rightarrow Gr = \frac{\ell^3 g \beta \Delta T}{\nu^2}$ (force de poussée d'Archimède/force visqueuse) | Rayleigh $\rightarrow Ra = Gr Pr$ $Ra = \frac{\ell^3 \rho^2 c_p g \beta \Delta T}{\mu \lambda}$ | |
| | Tension superficielle $\frac{\sigma}{L^2} \rightarrow k_\sigma/k_d^2$ | | $k_\sigma = k_\rho k_v^2 k_d$ | Weber $\rightarrow We = \frac{\rho v^2 D}{\sigma}$ (forces d'inertie/forces de tension de surface) | | |
| 3. Énergétique (puissance/ unité de volume) | $k_T(\Theta)$ | Puissance volumique E_v/t | | $k_{E_v} = k_\rho k_d^2/k_t^3$ | | |
| | | Puissance cinétique volumique $\rho \frac{v^2}{t} \rightarrow k_\rho \frac{k_v^2}{k_t}$ | | $k_{E_c} = k_\rho k_v^3/k_d$ | | |
| | | Puissance interne volumique $\rho \frac{c_p T}{t} \rightarrow k_\rho k_{c_p} \frac{k_T}{k_t}$ | | $k_{U_v} = k_\rho k_{c_p} k_T \frac{k_v}{k_d}$ $k_{c_p} = k_v^2/k_T$ | Eckert $\rightarrow Ec = \frac{c_p T}{v^2}$ (énergie interne/énergie cinétique) | |
| | | | Pression (en puissance volumique) $\frac{P}{t} \rightarrow k_p/k_t$ | $k_p = k_\rho k_{c_p} k_T$ (= $k_\rho k_v^2$) | $Eu/Ec = \frac{P}{\rho c_p T}$ (énergie mécanique de pression/énergie interne) | Équation d'état gaz parfait $k_M k_{c_p} = 1; \frac{\bar{M} c_p}{R}$ |

Loi des échelles entre maquette (m) et prototype (p) : $G_m = k_G G_p$, avec k_G échelle de la grandeur G .

Dimensions fondamentales (en thermomécanique) : M (masse), L (longueur), T (temps), Θ (température).

Tableau 3 – Conditions de similitude et nombres sans dimension associés (suite)

| Similitude | Échelles de base | Grandeurs | | Échelles secondaires | Nombres sans dimension | |
|---|------------------|-----------|---|---|---|--|
| | | Base | Secondaires | | Principaux | Secondaires |
| 3. Énergétique (puissance/unité de volume) | $k_T(\Theta)$ | | Puissance volumique dissipée par frottement $\frac{\mu v^2}{L^2} \rightarrow k_\mu \frac{k_v^2}{k_d^2}$ | $k_\mu = k_\rho k_{c_p} k_T \frac{k_d}{k_v}$ (= $k_\rho k_v k_d$) | $EcRe = \frac{c_p TD}{\nu \nu}$ (énergie interne/énergie dissipée par frottement) | |
| | | | Puissance volumique transmise par conduction $\frac{\lambda T}{L^2} \rightarrow k_\lambda \frac{k_T}{k_d^2}$ | $k_\lambda = k_\rho k_{c_p} k_v k_d$ | Péclet $\rightarrow Pe = \frac{\rho c_p \nu D}{\lambda}$ (énergie interne/énergie transmise par conduction) | $Pe = Pr Re = \frac{\mu c_p \rho \nu D}{\lambda \mu}$ Prandtl $Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda} = \frac{\nu}{a}$ |
| | | | Transfert convectif vers une paroi $\frac{h_c T}{D} \rightarrow k_{h_c} \frac{k_T}{k_d}$ | $k_{h_c} = k_\lambda / k_d$ | Nusselt $\rightarrow Nu = \frac{h_c D}{\lambda}$ (convection/conduction) | Stanton $\rightarrow St = \frac{h_c}{\rho c_p \nu} = \frac{Nu}{Pe}$ (énergie transmise à la paroi/énergie transportée) |

Loi des échelles entre maquette (m) et prototype (p) : $G_m = k_G G_p$, avec k_G échelle de la grandeur G .
Dimensions fondamentales (en thermomécanique) : M (masse), L (longueur), T (temps), Θ (température).

| Notations et Symboles | | |
|-----------------------|--------------------------------|--|
| Symbole | Unité | Définition |
| a | $m^2 \cdot s^{-1}$ | Diffusivité thermique |
| c_p | $J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$ | Capacité thermique massique à pression constante |
| c_v | $J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$ | Capacité thermique massique sous volume constant |
| D | m | Dimension caractéristique |
| e_i | | Exposants des paramètres dans les monômes |
| F | N | Force |
| G | | Grandeur physique quelconque |
| g | $m \cdot s^{-2}$ | Accélération due à la pesanteur |
| g_i | $m \cdot s^{-2}$ | Composante selon la direction i de l'accélération due à la pesanteur |
| g_i | | Valeur de l'exposant calculée à partir de la dimension du phénomène étudié |
| h_c | $J \cdot K^{-1} \cdot m^{-2}$ | Coefficient de convection thermique |
| h_i | | Fonction linéaire des exposants |
| k_g | | Échelle de la grandeur G |
| k_{ij} | | Coefficient de la fonction h |
| k_n | | Constante du monôme d'ordre n |
| L | m | Unité de longueur |
| M | kg | Unité de masse |

| Notations et Symboles | | |
|-----------------------|---------------------------------|---|
| Symbole | Unité | Définition |
| \bar{M} | $kg \cdot mol^{-1}$ | Masse molaire |
| m | kg | Masse |
| \dot{m} | $kg \cdot s^{-1}$ | Débit massique |
| N | $tr \cdot s^{-1}$ | Vitesse de rotation |
| P | Pa | Pression |
| P^* | Pa | Pression étoilée ; $P^* = P + \varpi z$ |
| \bar{R} | $J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$ | Constante molaire des gaz parfaits |
| r | $J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$ | Constante massique du gaz |
| t | s | Temps |
| T | K | Température |
| T | s | Unité de temps, temps caractéristique |
| T'_{ij} | Pa | Projection dans la direction i de la contrainte visqueuse sur la face d'orientation j |
| V | $m \cdot s^{-1}$ | Vitesse caractéristique |
| \mathbf{v} | $m \cdot s^{-1}$ | Vecteur vitesse |
| V | m^3 | Volume d'intégration |
| v_e | $m \cdot s^{-1}$ | Vitesse d'entraînement |
| v_i | $m \cdot s^{-1}$ | Composante selon i de la vitesse |
| v_s | $m \cdot s^{-1}$ | Vitesse du son |

| Notations et Symboles | | |
|-----------------------|-------------------------------|--|
| Symbole | Unité | Définition |
| x_i | m | Coordonnée selon la direction i |
| X_i | | Paramètre i du phénomène étudié |
| z | m | Altitude |
| Φ | $W \cdot m^{-3}$ | Fonction de dissipation |
| \varnothing | m | Diamètre extérieur de la roue |
| θ | K | Unité de température |
| Ω | m^2 | Aire de la section de transfert |
| Ω' | m^2 | Aire de la section de paroi où se produisent les transferts convectifs |
| β | K^{-1} | Coefficient de dilatation volumique |
| δ_{ij} | | Symbole de Kronecker (= 1 si $i = j$; = 0 si $i \neq j$) |
| γ | $m \cdot s^{-2}$ | Accélération |
| γ_g | | Rapport des capacités thermiques sous pression constante et sous volume constant |
| η | $Pa \cdot s$ | Viscosité de dilatation ou deuxième coefficient de viscosité |
| λ | $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ | Conductivité thermique du fluide |
| μ | $Pa \cdot s$ | Viscosité dynamique |
| ν | $m^2 \cdot s^{-1}$ | Viscosité cinématique |
| π | | Nombre sans dimension |
| ρ | $kg \cdot m^{-3}$ | Masse volumique |
| σ | $Pa \cdot m$ | Tension superficielle |
| ϖ | $N \cdot m^{-3}$ | Poids volumique |
| Indices et exposants | | |
| ℓ, m, t, θ | | Exposants des unités |
| d | | Distance |
| e | | Entrée, entraînement |
| E | | Énergie |
| F | | Force |
| g | | Accélération de la pesanteur |
| i | | Relatif au paramètre i ou à la direction i |
| j | | Relatif au paramètre j ou à la direction j |
| m | | Relatif à la maquette |
| m | | Masse |
| n | | Relatif au $n^{\text{ième}}$ monôme |

| Notations et Symboles | | |
|------------------------|--------------------------------|---|
| Indices et exposants | | |
| ρ | | Relatif aux paramètres, relatif au prototype, relatif à la pression |
| q | | Relatif aux unités |
| s | | Sortie |
| t | | Temps |
| v | | Vitesse, volume ou volumique |
| γ | | Accélération |
| ρ | | Masse volumique |
| $'$ | | Caractérise une variable réduite |
| Nombres sans dimension | | |
| Symbole | Nom | Équation |
| Re | Reynolds | $Re = \frac{\rho v D}{\mu}$ |
| Eu | Euler | $Eu = \frac{P}{\rho v^2}$ |
| Ec | Eckert | $Ec = \frac{c_p T}{v^2}$ |
| Pr | Prandtl | $Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda} = \frac{\nu}{a}$ |
| Pe | Péclet | $Pe = \frac{\rho c_p v D}{\lambda} = Re Pr$ |
| Fr | Froude | $Fr = \frac{v}{\sqrt{gD}}$ |
| Nu | Nusselt | $Nu = \frac{hD}{\lambda}$ |
| St | Stanton | $St = \frac{h}{\rho c_p v}$ |
| Gr | Grashof | $Gr = \frac{\ell^3 g \beta \Delta T}{\nu^2}$ |
| Ra | Rayleigh | $Ra = Gr Pr = \frac{\ell^3 \rho^2 c_p g \beta \Delta T}{\mu \lambda}$ |
| Ma | Mach | $Ma = \frac{v_e}{v_s}$ |
| We | Weber | $We = \frac{\rho v^2 D}{\sigma}$ |
| δ_R | Coefficient de débit de Rateau | $\delta_R = \frac{\dot{m}}{\rho \varnothing^2 v_e}$ |